

# Hydrodynamik: bewegte Flüssigkeiten

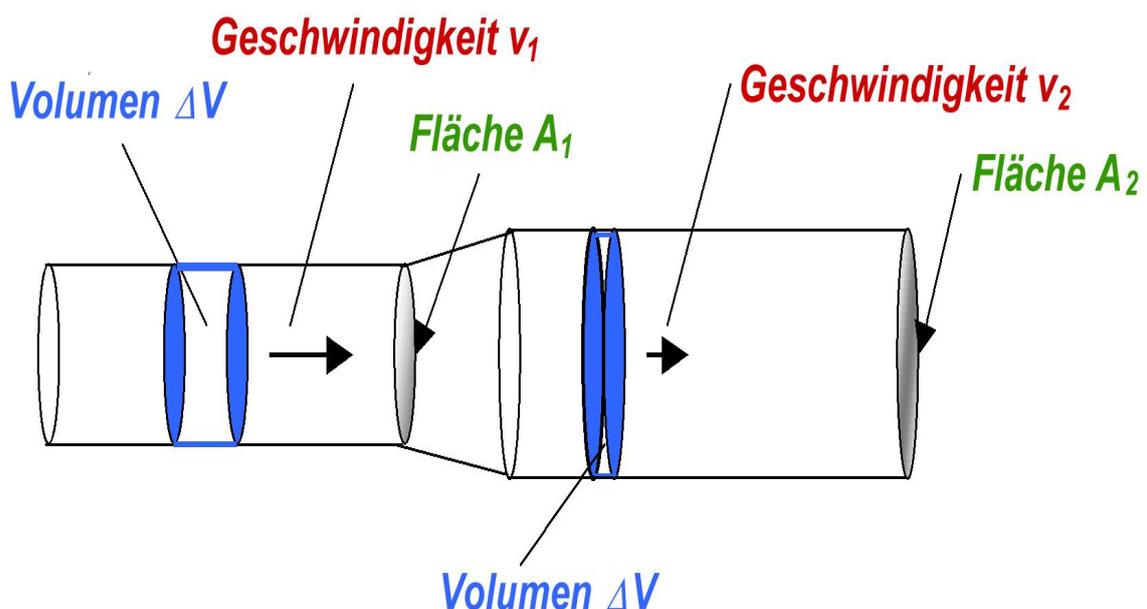
---

Wir betrachten eine **stationäre Strömung**, d.h. die Geschwindigkeit der Strömung an einem gegebenen Punkt bleibt **konstant** im Laufe der Zeit. Außerdem betrachten wir zunächst die Strömung einer **idealen** Flüssigkeit, die nicht komprimierbar ist und ohne Widerstand fließt.

In der strömenden Flüssigkeit herrscht an jeder Stelle einen **Druck**, nun aber heißt er **hydrodynamischer** Druck. Er besteht nicht nur aus **Stempeldruck** und **Schweredruck**, wie in der ruhenden Flüssigkeit, sondern enthält auch einen weiteren Beitrag, der durch die **Strömung** (kinetische Energie!) zustande kommt.

Wir betrachten die Energie eines Probevolumens  $\Delta V$  an zwei verschiedenen Stellen (1 und 2) innerhalb einer strömenden Flüssigkeit in einem Rohr. Das Rohr soll eine Querschnittsfläche  $A_1$  an Stelle 1 und  $A_2$  an Stelle 2 haben.

---



Die **Arbeit**, die zur Bewegung des Volumens um eine Strecke  $\Delta s_1$  bzw.  $\Delta s_2$  an den Stellen 1 bzw. 2 geleistet werden muß, ist:

$$\begin{aligned}\Delta W &= F_1 \Delta s_1 - F_2 \Delta s_2 \\ &= P_1 A_1 \Delta s_1 - P_2 A_2 \Delta s_2 \\ &= P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = (P_1 - P_2) \Delta V ;\end{aligned}$$

Die **Energiedifferenz**, die durch diese Verschiebung entsteht, ist:

$$\Delta E = mg(h_2 - h_1) + 1/2 m(v_2^2 - v_1^2) .$$

Setzen wir die geleistete **Arbeit** gleich die resultierende **Energiedifferenz** (Energieerhaltung!), so erhalten wir:

$$(P_1 - P_2) \Delta V = mg(h_2 - h_1) + 1/2 m(v_2^2 - v_1^2) .$$

oder, mit  $m = \rho \Delta V$  ( $\rho =$  **Massendichte**), nach Umordnung:

$$[P_1 + \rho gh_1 + \rho/2 v_1^2] \Delta V = [P_2 + \rho gh_2 + \rho/2 v_2^2] \Delta V .$$

Dies heißt, die Größe  $[P + \rho gh + \rho/2 v^2]$  ist überall **konstant** (wir können die willkürlich gewählten Stellen 1 und 2 weglassen):

$$[P + \rho gh + \rho/2 v^2] = \text{konst.} = P_0$$

$$[P + \rho gh + \rho/2 v^2] = \text{konst.} = P_0$$

Diese Gleichung nennt man den **Satz von Bernoulli**. Er drückt die **Energieerhaltung** bei der Strömung aus, und gilt streng nur für die **stationäre, ideale Strömung**. Er besagt qualitativ:

*'Der Druck einer strömenden Flüssigkeit nimmt ab, wenn sie schneller und/oder aufwärts strömt'.*

Die drei Terme in der Bernoulligleichung sind **Stempeldruck**, **Schweredruck** sowie der Druck, der durch die **Strömung** selbst zustande kommt,  $(\rho/2) v^2$ ; dieser wird **Staudruck** genannt. Eine andere Formulierung des Bernoulli-Satzes wäre daher:

*Die Summe von  
**Stempeldruck**, **Schweredruck** und **Staudruck**  
(in einer idealen, stationär strömenden Flüssigkeit)  
ist konstant.*

## Zusammenfassung - Strömung

**Volumenstromstärke** =

$$I_V = \Delta V / \Delta t \quad \text{bzw.} \quad dV/dt, \quad \text{wobei} \quad I_V = Av$$

$A$  = Querschnittsfläche der Strömung,  
 $v$  = Strömungsgeschwindigkeit.

**Kontinuitätsgleichung:** bei der stationären Strömung ist  $I_V$  überall gleich, d.h.

**$Av = \text{konst.}$**  → *Vergrößerung der Querschnittsfläche erniedrigt die Geschwindigkeit und umgekehrt.*

---

**Bernoulli-Gleichung** (Energieerhaltung):

$$P + \rho gh + \rho/2 v^2 = \text{konst.}$$

[Gilt für eine **ideale Strömung**; bei **realer** Strömung ist die Summe des **Stempel-**, **Schwere-** und **Staudrucks** **zeitabhängig** und gegeben durch einen 'Reibungsdruck'  $P_R(t)$ ].

---

**Reale Strömung** einer Flüssigkeit der Viskosität  $\eta$  in einem runden Rohr (Hagen-Poiseuille'sches Gesetz):

$$I_V = (\pi/8) (r^4/l) (P_2 - P_1)/\eta$$

oder allgemein:  $I_V = \Delta P/R_S$  mit  $R_S =$   
**Strömungswiderstand.**

# Wärmelehre

## Temperatur

In der **Wärmelehre** brauchen wir, zusätzlich zu den drei mechanischen Größen bzw. Einheiten **Länge** (Meter), **Zeit** (Sekunde) und **Masse** (Kilogramm), auch zwei weitere: die **Temperatur** ("Potentialgröße der Wärme") sowie die **Stoffmenge** (Molzahl  $\nu$ ). Wir beginnen mit einer kurzen

### *Chronik der Temperatur*

<u>1700-1720</u>	<i>Newton</i> und <i>Fahrenheit</i> überlegen sich, wie man eine <b>Temperaturskala</b> festlegen kann. <i>Fahrenheit</i> setzt den <b>Siedepunkt von Wasser</b> $t_{sp} = 212^\circ \text{F}$ und den <b>Eispunkt</b> $t_{ep} = 32^\circ \text{F}$ , so daß der Lebensbereich der Menschen von etwa $0^\circ \text{F}$ bis $100^\circ \text{F}$ reicht.
<u>1702</u>	<i>Anatons</i> stellt fest, daß der <b>Druck</b> eines Gases mit der <b>Temperatur</b> steigt. Bei ca. $t = -240^\circ$ ginge der Druck gegen Null ( <b>absoluter Nullpunkt!</b> ).
<u>1738</u>	<i>Bernouilli</i> findet, daß die <b>Temperatur</b> in einem Gas mit dem <b>Quadrat der mittleren Geschwindigkeit</b> der Gasteilchen wächst: Anfang der <b>kinetischen Gastheorie</b> .
<u>1742</u>	<i>Celsius</i> definiert eine <b>Temperaturskala</b> , wonach $t_{sp} = 100^\circ \text{C}$ und $t_{ep} = 0^\circ \text{C}$ sind (moderne <b>Celsiuskala</b> ).
<u>1848</u>	<i>Kelvin</i> stellt fest, daß der <b>absolute Nullpunkt</b> $t_{np} = -273,16^\circ \text{C}$ beträgt (durch Messungen an idealen Gasen). Dies definiert die <b>absolute</b> oder <b>Kelvinskala</b> : $T = 0 \text{ K}$ entspricht $t = -273,16^\circ \text{C}$ , $1 \text{ K} = 1^\circ \text{C}$ .
<u>1908</u>	<i>Heike Kammerlingh Onnes</i> verflüssigt <b>Helium</b> ( $T_{sp} = 4,2 \text{ K}$ ): Beginn der <b>Tieftemperaturphysik</b> .
<u>1911</u>	Kammerlingh Onnes entdeckt bei Quecksilber die <b>Supraleitung</b> .

---

## Wärmemessung: Kalorimetrie

Der **Wärmeinhalt** eines Körpers ist nach der obigen Definition eine eindeutige Funktion seiner **Temperatur** (dies läßt sich für ein **ideales Gas** relativ einfach aus der Mechanik sowie die Gasgleichung ableiten: kinetische Gastheorie). Die Proportionalitätskonstante zwischen Wärmemenge  $\Delta Q$  und Temperaturänderung  $\Delta T$  heißt '**Wärmekapazität**' und ist eine Eigenschaft des Materials:

$$C = \Delta Q / \Delta T \quad (\text{Einheit: J/K}) .$$

Die so definierte Wärmekapazität gilt für einen bestimmten **Körper**. Man definiert auch die sog. **spezifische** Wärmekapazität  $c_m$ , die auf ein Gramm der Substanz bezogen ist:

$$c_m = C/m$$

( $m$  = Masse des Körpers in g; Einheit: J/g K )

sowie die **molare** Wärmekapazität  $C_M$ , die für ein Mol der Substanz gilt:

$$C_M = C/\nu$$

( $\nu$  = Molzahl, Einheit von  $C_M = \text{J/Mol}\cdot\text{K}$ ).

---

Messung der **Wärmekapazität** bzw. einer definierten **Wärmemenge** heißt '**Kalorimetrie**'. Sie wird mithilfe eines **Kalorimeters** durchgeführt, eines Behälters, der möglichst gut von der Umgebung isoliert ist und eine wohlbekannte eigene Wärme-kapazität hat. Probe und Kalorimeter werden mit einer be-kannten Wärmemenge erwärmt (elektrisch, mittels Reibung, oder aus einer chemischen Reaktion) und die resultierende Temperaturerhöhung gemessen.

Alternativ dazu wird die Probe, bei einer bekannten Anfangstemperatur, mit einer **Vergleichssubstanz** bei einer anderen Ausgangstemperatur in Gleichgewicht gebracht und die Endtemperatur gemessen (**Mischkalorimeter**; Vergleichs-substanz häufig Wasser).

# Wärme Flüsse

Zwei feste Körper, Flüssigkeiten oder auch zwei Luftvolumina seien miteinander (irgendwie) verbunden. Der eine (Luft-)Körper habe die Temperatur  $T_1$ , der zweite die Temperatur  $T_2$ . Dann „fließt“ Wärmeenergie ( $Q$ ) von dem einen Körper zu dem Zweiten. Ein Beispiel wäre der Wärmefluss von einem beheizten Raum (z.B.  $T_1 = 22^\circ\text{C}$ , durch eine Wand zur Außenluft (z.B.  $T_2 = -5^\circ\text{C}$ ) oder die Erwärmung von Wasser auf einer elektrischen aufgeheizten Herdplatte.

Der Rate des thermischen Energieflusses ( $r_W$ ) bzw. der Wärmefluss ( $\Phi_W$ ) oder Wärmestrom ( $I_W$ ) ist von hohem (technischen) Interesse. Der Wärmefluss bzw. Wärmestrom  $I_W$  ( $= r_W = \Phi_W$ ) ist definiert als:

$$I_W = dQ/dt$$

Für den Wärmestrom zwischen zwei Körpern, deren Temperatur sich um  $\Delta T$  unterscheidet gilt dann:

$$I_W = \Delta T / L_W$$

wobei  $L_W$  die Wärmeleitfähigkeit ist. Das Vorzeichen von  $\Delta T$  (entweder  $T_2 - T_1$  oder  $T_1 - T_2$ ) und damit das Vorzeichen des Wärmestroms ist Definitionssache und sollte so gewählt werden, wie es für die jeweilige Anwendung der obigen Gleichung am Sinnvollsten ist. Wenn anstelle der Wärmeleitfähigkeit ( $L_W$ ) der Wärmewiderstand ( $R_W = 1/L_W$ ) verwendet wird, dann gilt in Analogie zum Ohm'schen Gesetz der Elektrizitätslehre:

$$I_W = R_W \Delta T$$