

# Mathematik-Brückenkurs 2011, FU Berlin

## Übungsblatt zu Grenzwerten und Differentialrechnung, 04.10.2011

### 1. Grenzwerte und der Satz von L'Hôpital

- (a) In welchen Fällen sind Grenzwerte einfach zu bestimmen; zum Beispiel in den folgenden Fällen

- i.  $\lim_{x \rightarrow 4} x$
- ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4}$
- iii.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$
- iv.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$

- (b) Manchmal ist es nicht so einfach, aber dann hilft oft der Satz von L'Hôpital:

**Theorem 1 (Satz von L'Hôpital)** Seien  $f$  und  $g$  zwei Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  eine reelle Zahl oder  $\pm\infty$ . Angenommen

$$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = \lim_{x \rightarrow r} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow r} f(x) = \pm \lim_{x \rightarrow r} g(x) = \pm\infty$$

und der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow r} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, dann ist

$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nutzen Sie den Satz von L'Hôpital um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen:

- i.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x+1}$
- ii.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$
- iii.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x-1}$  (Alternativer Lösungsweg?)
- iv.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$  (Tipp: schreiben Sie  $x \ln(x)$  als  $\ln(x)/\frac{1}{x}$ )

### 2. Ableitungen und Grenzwerte

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = x^2/(1-x)$ .

- (a) Ist die Funktion stetig? Falls nicht, bestimmen Sie die Position der Unstetigkeit(en).
- (b) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) der Funktion.
- (c) In der Vorlesung hatten wir die Definition der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

mittels Grenzwertbildung kennengelernt. Bestimmen Sie mittels dieser Definition die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ . (Tipp: Bestimmen Sie zunächst  $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x$  und führen Sie dann die Grenzwertbildung  $\Delta x \rightarrow 0$  durch.)

- (d) Bestimmen Sie nun die Ableitung  $f'(x)$  mittels der üblichen Differentiationsregeln.
- (e) Bestimmen Sie die Grenzwerte von  $f(x)$  und  $f'(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  und nutzen Sie dieses Wissen um den Funktionsgraphen zu skizzieren.

### 3. Reihe der Exponentialfunktion

In der Vorlesung hatten wir die Exponentialfunktion  $\exp(x) = e^x$  kennengelernt. Sie ist eindeutig durch die folgenden zwei Eigenschaften definiert:

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x) \qquad \exp(0) = 1 \qquad (2)$$

Doch wie berechnet eigentlich ein Taschenrechner (der nur multiplizieren und addieren kann) die Funktion?

Um das besser zu verstehen betrachten wir die Funktion  $f_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}$ .

(a) Zeigen Sie zunächst dass  $f'_N(x) = f_{N-1}(x)$  und  $f_N(0) = 1$ .

Um daraus folgern zu können, dass  $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = \exp(x)$  ist, müsste man wissen dass der Grenzwert  $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x)$  für alle  $x$  konvergiert.

(b) Können Sie eine Begründung finden warum  $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x)$  zumindest für alle  $x \leq 0$  konvergieren muss? (Tipp: Nutzen Sie dass  $f_N(x)$  monoton steigend in  $x$  und  $N$  ist.)

(c) Überzeugen Sie sich dass  $f_N(x)$  auch für größere Werte von  $x$  konvergiert, indem sie exemplarisch für ein selbst gewähltes  $x_0 > 1$  die Werte  $f_1(x_0), \dots, f_4(x_0)$  berechnen.

### 4. Geometrische Reihe

Für eine Zahl  $q \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Summen

$$S_N := 1 + q + q^2 + \dots + q^N = \sum_{k=0}^N q^k. \qquad (3)$$

(a) Zeigen Sie, dass  $S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$  !

(b) Sei nun  $|q| < 1$ . Wie lautet der Grenzwert  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$  ? Dies ist die so genannte geometrische Reihe.

(c) Nehmen wir an, Sie hätten am Anfang jedes Jahres 300 Euro übrig und würden sie unvernünftiger Weise immer Ihrer Bank anvertrauen. Nehmen Sie – noch unrealistischer – an, dass die Bank nicht pleite geht und Ihnen sogar einen stabilen Zinssatz von 5% per annum zahlt. Welchen Betrag haben Sie am Ende des vierten Jahres auf Ihrem Konto?

(d) Nutzen Sie die geometrische Reihe als Hilfsmittel, um die periodische Dezimalzahl  $0.1\overline{23} = 0.123232323\dots$  als ganzzahligen Bruch darzustellen!