Mathematik-Brückenkurs 2011, FU Berlin

Übungsblatt zu Grenzwerten und Differentialrechnung, 04.10.2011

1. ***Grenzwerte und der Satz von L'Hôpital***

   (a) In machen Fällen sind Grenzwerte einfach zu bestimmen; zum Beispiel in den folgenden Fällen

   i. $\lim_{x\to 4} x$
   ii. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4}$
   iii. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$
   iv. $\lim_{x\to\infty} \ln(x)$, $\lim_{x\to 0} \ln(x)$

   (b) Manchmal ist es nicht so einfach, aber dann hilft oft der Satz von L'Hôpital:

   Theorem 1 (Satz von L'Hôpital) *Seien f und g zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$ eine reelle Zahl oder $\pm\infty$. Angenommen*

   $$\lim_{x\to r} f(x) = \lim_{x\to r} g(x) = 0 \qquad \textit{oder} \qquad \lim_{x\to r} f(x) = \pm \lim_{x\to r} g(x) = \pm\infty$$

   und der Grenzwert $\lim_{x\to r} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann ist

   $$\lim_{x\to r} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to r} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

   Nutzen sie den Satz von L'Hôpital um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen:

   i. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x+1}$
   ii. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$
   iii. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x-1}$ (Alternativer Lösungsweg?)
   iv. $\lim_{x\to 0} x\ln(x)$ (Tipp: schreiben sie $x\ln(x)$ als $\ln(x)/\frac{1}{x}$)

2. ***Ableitungen und Grenzwerte***

   Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2/(1-x)$.

   (a) Was ist der Definitionsbereich der Funktion? Ist die Funktion stetig? Bestimmen sie etwaige Lücken im Definitionsbereich und Unstetigkeitstellen.

   (b) Bestimmen sie die Nullstelle(n) der Funktion.

   (c) In der Vorlesung hatten wir die Definition der Ableitung

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

   mittels Grenzwertbildung kennengelernt. Bestimmen sie mittels dieser Definition die Ableitung von f an der Stelle $x_0 = 0$. (Tipp: Bestimmen sie zunächst $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x$ und führen Sie dann die Grenzwertbildung $\Delta x \to 0$ durch.)

   (d) Bestimmen sie nun die Ableitung $f'(x)$ mittels der üblichen Differentiationsregeln.

   (e) Bestimmen sie die Grenzwerte von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \to \pm\infty$ und nutzen sie dieses Wissen um den Funktionsgraphen zu skizzieren.

3. ***Reihe der Exponentialfunktion***

In der Vorlesung hatten wir die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ kennengelernt. Sie ist eindeutig durch die folgenden zwei Eigenschaften definiert:

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x) \qquad\qquad \exp(0) = 1 \tag{2}$$

Doch wie berechnet eigentlich ein Taschenrechner (der nur multiplizieren und addieren kann) die Funktion?

Um das besser zu verstehen betrachten wir die Funktion $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$.

(a) Zeigen Sie zunächst dass $f'_N(x) = f_{N-1}(x)$ und $f_N(0) = 1$.

Um daraus folgern zu können, dass $\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \exp(x)$ ist, müsste man wissen dass der Grenzwert $\lim_{N\to\infty} f_N(x)$ für alle x konvergiert. In diesem Fall kann man das mit dem Quotientenkriterium zeigen (welches noch ausführlicher in der Mathematik vorlesung besprochen werden wird):

Theorem 2 (Quotientenkriterium) *Die unendliche Summe* $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} r_n$ *mit Summanden* $r_n \in \mathbb{R}/0$ *ist konvergent wenn ab einem* n_0 *für alle* $n > n_0$ *der Quotient aufeinander folgender Summanden betragsmäßig kleiner als 1 ist:*

$$\left\|\frac{r_{n+1}}{r_n}\right\| < 1 \tag{3}$$

(b) Zeigen sie, dass für jedes x ein N_0 existiert, sodass für alle $N > N_0$ gilt:

$$\frac{f_{N+1}(x)}{f_N(x)} < 1 \tag{4}$$

4. ***Geometrische Reihe***

Für eine Zahl $q \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Summen

$$S_N := 1 + q + q^2 + \cdots + q^N = \sum_{k=0}^{N} q^k. \tag{5}$$

(a) Zeigen Sie, dass $S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$!

(b) Sei nun $|q| < 1$. Wie lautet der Grenzwert $\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$? Dies ist die so genannte geomentrische Reihe.

(c) Nehmen wir an, Sie hätten am Anfang jedes Jahres 300 Euro übrig und würden sie unvernünftiger Weise immer Ihrer Bank anvertrauen. Nehmen Sie – noch unrealistscher – an, dass die Bank nicht pleite geht und Ihnen sogar einen stabilen Zinssatz von 5% per annum zahlt. Welchen Betrag haben Sie am Ende des vierten Jahres auf Ihrem Konto?

(d) Nutzen Sie die geometrische Reihe als Hilfsmittel, um die periodische Dezimalzahl $0.1\overline{23} = 0.123232323\ldots$ als ganzzahligen Bruch darzustellen!