Mathematik-Brückenkurs 2011, FU Berlin

Übungsblatt zur Integralrechnung, 07.10.2011

1. ***Differenziation und Stammfunktion***

   Berechnen Sie die erste Ableitung und die Stammfunktion von

   (a) $f(x) = ax^2 + b^x + c$

   (b) $f(x) = e^x$

   (c) $f(x) = \ln(x)$

   (d) $f(x) = x\cos(x^2)$ (geschicktes raten)

   (e) $f(x) = x\ln(x)$ (partielle Integration)

   (f) $f(x) = 2x\ln(x^2)$ (Substitution $u(x) = x^2$)

2. ***Fläche und Bogenlänge***

   Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ mit dem Definitionsbereich $D = [-1, 1]$.

   (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$

   (b) Bestimmen Sie die Fläche welche die Funktion mit der x-Achse einschließt.

   (c) Bestimmen Sie die Bogenlänge des Graphen von $f(x)$.

   (d) Welche geometrische Figur beschreibt die Funktion?

3. ***Raumsonde***

   Eine Raumsonde fliegt reibungslos mit Geschwindigkeit v_0 durchs Vakuum. Das Gewicht der Sonde setzt sich aus Eigenmasse m_E und der Masse des Treibstoffs m_T zusammen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Triebwerk gezündet, welches eine konstante Schubkraft F erzeugt. Durch die Verbrennung des Treibstoffs wird die Raumsonde leichter. Ihre Masse $m(t)$ nimmt mit einer konstanten rate F/u ab bis der Treibstoff aufgebraucht ist.

   (a) Welche Einheit und welche Bedeutung hat u?

   (b) Drücken Sie die Brenndauer T durch m_T, F und u aus.

   (c) Wie groß ist die Geschwindigkeit $v(T)$ der Rakete am Ende der Beschleunigung in Abhängigkeit von v_0, m_E, m_T und u.

   (d) Warum taucht F nicht in der finalen Formel auf? Welche Größe will man also im Raketenbau optimieren?

4. ***Volumen von Rotationskörpern***

   Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\cos(x)$.

   (a) Offensichtlich ist $f(0) = 0$ Bestimmen sie die kleinste positive Nullstelle $x_0 > 0$ von $f(x)$.

   (b) Bestimmen Sie die Fläche welche die Funktion mit der x Achse zwischen im Intervall $[0, x_0]$ einschließt.

   (c) Bestimmen Sie das Volumen welches durch Rotation der Funktion im Intervall $[0, x_0]$ um die x-Achse entsteht. Tipp: bestimmen sie zunächst $\int \cos(x)^2 dx$