Mathematik-Brückenkurs 2011, FU Berlin

Übungsblatt zur Vektorechnung, 10.10.2011

1. ***Schwimmer***

   Ein Schwimmer möchte einen Fluß der Breite $b = 20m$ überqueren, wobei er direkt gegenüber ankommen will. Seine Geschwindigkeit (relativ zum Wasser) betrage $v_S = 1m/s$. Der Fluß habe eine Fließgeschwindigkeit von $v_F = 0,5m/s$.

   (a) Welchen Winkel zur Senkrechten des Ufers muß er einschlagen?

   (b) Wielange braucht er, bis er das gegenüberliegende Ufer erreicht.

2. ***Skalarprodukt und Winkel*** Das Skalarprodukt von $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ist definiert als

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \tag{1}$$

   (a) Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ und α der von ihnen eingeschlossene Winkeln. Zeigen Sie, daß

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos \alpha. \tag{2}$$

   Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Spezialfall $a = (a_1, 0)$. Für den allgemeinen Fall kann eine geeignete Koordinatentransformation hilfreich sein.

   (b) Betrachten Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $\boldsymbol{a} = (1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (3, 3)$ und $\boldsymbol{c} = (2, 4)$. Überprüfen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts, ob es rechtwinklig ist.

3. ***Vektorprodukt***

   Das Vektorprodukt von $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

   (a) Zeigen Sie, daß das Kreuzprodukt antisymmetrisch ist. Das heißt, es gilt $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

   (b) Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ sowohl auf $\boldsymbol{a}$ als auch auf $\boldsymbol{b}$ senkrecht steht.

   (c) Das Vektorpodukt erfüllt die Beziehung

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| |\sin \alpha|, \tag{4}$$

   welche, zusammen mit den in (a) und (b) gezeigten Eigenschaften, das Kreuzprodukt bis auf das Vorzeichen bestimmen. Warum ist ein derartiges Produkt nur im $\mathbb{R}^3$ möglich?

   (d) Zeigen Sie, daß $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ dem Flächeninhalt des von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelograms entspricht. Hinweis: Wenn man (c) benutzt, braucht man nicht in Koordinaten zu arbeiten.

4. ***Teilchen im Magnetfeld***

   In einem magnetischen Feld werden geladene, sich bewegende Teilchen abgelenkt. Die sogenannte Lorenz-Kraft $\boldsymbol{F}$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{5}$$

   Hier ist q die Ladung des Teilchens, $\boldsymbol{v}$ seine Geschwindigkeit und $\boldsymbol{B}$ der Vektor der Stärke und Richtung des Magnetfelds angibt.

   Betrachten Sie folgende Situation: Ein homogenes Magnetfeld der Stärke $B_0 = 1kg/(As^2)$ wirke in Richtung der x-Achse. Ein Elektron mit Ladung $q = -e$ ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}As$ bezeichnet die Elementarladung) bewege sich in der x-y-Ebene in einem Winkel von $\alpha = 15°$ zur y-Achse. Seine Geschwindigkeit betrage $v = 0.9c$, wobei $c = 3,0 \cdot 10^8 m/s$ die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. In welche Richtung und mit welcher Stärke wirkt die Lorenz-Kraft? Hinweis: Kräfte werde in der Einheit Newton (N) angegeben, wobei $1N = 1kg \cdot m/s^2$.

5. ***Geraden im*** $\mathbb{R}^2$

   Betrachten Sie die beiden Geraden $g_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = (0,2) + t(1,1), t \in \mathbb{R}\}$ und $g_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = (0,6) + t(3,-1), t \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Schreiben Sie g_1 und g_2 in der funktionalen Form.

   (b) Bestimmen Sie ihren Schnittpunkt.

6. ***Gerade im*** $\mathbb{R}^3$

   Gegeben sei die Gerade $g = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = (1,1,1) + t(1,2,2), t \in \mathbb{R}\}$.

   Berechnen sie den Abstand von g zum Ursprung $(0,0,0)$. Hinweis: Die Konstruktion einer geeigneten Ebene ist hilfreich.