Mathematik-Brückenkurs 2011, FU Berlin

7.Übungsblatt: Komplexe Zahlen, 06.10.2011

1. ***Elementare Rechenregeln für komplexe Zahlen***
   Berechnen sie für folgendes Paar von komplexen Zahlen $z = 2 + \mathrm{i}$, $w = 1 - \mathrm{i}$

   (a) $z + w$

   (b) $\bar{z}$, $\bar{w}$

   (c) $z \cdot w$

   (d) $\frac{z}{w}$

   Benutzen sie die Darstellung $z = x + \mathrm{i}y$, $w = a + ib$ um folgende Rechenregeln zu zeigen

   (e) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

   (f) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

   (g) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

2. ***Die Polardarstellung***
   Eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ kann alternativ auch als $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ dargestellt werden.

   (a) Zeigen sie mit Hilfe der Euler-Formel $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, dass $r = \sqrt{\bar{z}z}$ und $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ gilt. Vergewissern sie sich, dass $\bar{z}z$ eine nicht-negative reelle Zahl ist.

   Berechnen Sie nun die Polardarstellung von

   (b) $z = 1 + \mathrm{i}$

   (c) $w = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

   Hinweis: Folgende Werte der sin und cos Funktion könnten nützlich sein: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

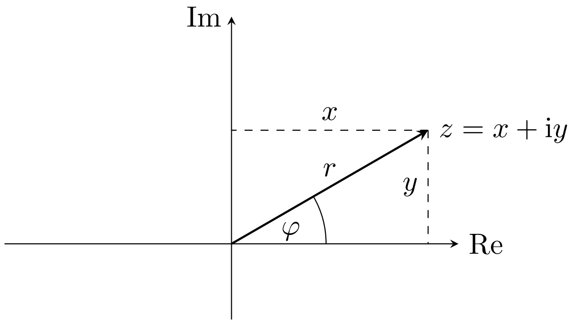

Abbildung 1: Die komplexe Zahlenebene. Die x-Koordinate entspricht dem Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und die y-Koordinate dem Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$. Der Betrag $r = |z|$ entspricht der Länge des Vektors zum Punkt (x,y) und die Phase φ dem mit der x-Achse eingeschlossenen Winkel.

3. ***Die komplexe Zahlenebene***

   Gegeben sind folgende komplexe Zahlen in Polardarstellung: $z = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ und $w = 2e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

   (a) Berechnen Sie die Darstellung als $x + \mathrm{i}y$ und zeichnen sie z und w als Vektoren in der Komplexen Zahlenebene.

(b) Berechnen sie in Polardarstellung: $\bar{w}$, z^2.

Hinweis: Machen Sie sich zuerst noch einmal klar warum die Polardarstellung so gut für die Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen geeignet ist. Auch für komplexe Argumente gilt $e^z e^w = e^{z+w}$. Verwenden Sie folgende komplexe Werte von $e^{\mathrm{i}\varphi}$: $e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i}$ zur Berechnung.

(c) Zeichnen Sie $\bar{w}$, z^2 ebenfalls in die komplexe Zahlenebene. Was fällt ihnen auf?

4. ***Komplexer Widerstand - Impedanz***
Für einen kosinusförmigen Verlauf von Spannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$ und Strom $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$ definiert man die komplexe Spannung $u(t) = U_0 e^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi_u)}$ und den komplexen Strom $i(t) = I_0 e^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi_i)}$. Sind Strom und Spannung nicht gleichphasig $\varphi_u \neq \varphi_i$ so gilt die Beziehung $U(t) = R \cdot I(t)$ nicht mehr. Führt man aber einen komplexen Widerstand, die sog. Impedanz Z, ein so gilt analog folgendes Gesetz für die komplexen Größen $u(t) = Z \cdot i(t)$.

   (a) Welche Beziehung besteht zwischen u und U beziehungsweise zwischen i und I?

   (b) Berechnen Sie den komplexen Widerstand Z für $U(t) = 220 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ V, $I(t) = 11 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ A. Geben sie $|Z|$, $\mathrm{Re}(Z)$ und $\mathrm{Im}(Z)$ an.

   (c) Der komplexe Widerstand einer Spule ist $Z_L = \mathrm{i}\omega L$, ein ohmscher Widerstand ist gegeben durch eine reelle Zahl R, $Z_R = R$. Schaltet man Spule und ohmschen Widerstand in Reihe so gilt für den komplexen Gesamtwiderstand $Z = Z_R + Z_L$. Es sei $\omega = 50\frac{1}{s}$, $L = \frac{\sqrt{3}}{5}\Omega s$ und $R = 10\Omega$. Es liege $U(t) = 220\cos(\omega t)$ V als Spannung an. Welche Phasenverschiebung haben Spannung und Strom?

5. ***Komplexe Zahlen und*** 2×2***-Matrizen***
Es seien zwei 2×2-Matrizen gegeben,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen sie $A+B$, AB. Erkennen sie die Struktur der komplexen Zahlen wieder?

   (b) Man kann also die komplexen Zahlen mit Matrizen vom obigen Typ identifizieren. Wie sieht also für $z = x + \mathrm{i}y$ die entsprechende Matrix $M(z)$ aus?

   (c) Durch welche Matrix-Operation erhält man aus $M(z)$, $M(\bar{z})$?

   (d) Welche Matrix entspricht $M(\frac{1}{z})$?