# Mathematik-Brückenkurs 2011, FU Berlin

## Übungsblatt zu elementaren Funktionen, 04.10.2011

1. ***Douglas Adams Party*** “One night, long ago, a band of drunken astro-engineers of the first generation clambered around the building digging this, fixing that, banging very hard on the other, and when the sun rose the following morning, it was startled to find itself shining on a building full of happy drunken people that was now floating like a young and uncertain bird over the treetops.
   Not only that, but the flying party had also managed to arm itself rather heavily. If they were going to get involved in any petty arguments with wine merchants, they wanted to make sure they had might on their side. “– Douglas Adams

   (a) Jeder Party-Gast lädt pro Stunde zwei weitere Leute ein, die natürlich sofort kommen. Wie lange dauert es bis sich die Party von ursprünglich 100 Leuten auf 1 Million Leute ausgedehnt hat.

   (b) Jeder Gast trinkt pro Stunde $\frac{1}{4}$ Flasche pangalaktischer Donnergurgler. Wie viel wird nach 5 Stunden getrunken?

2. ***Rechenregeln Logarithmus*** Zu den Rechenregeln für die Exponentialfunktion gibt es entsprechende Rechenregeln für den Logarithmus.
   Leiten Sie diese entsprechend des ersten Beispiels her. Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}_0^+$.

   (a) $e^{-a} = \frac{1}{e^a} \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} = -\ln x$

   (b) $e^a e^b = e^{a+b} \Leftrightarrow \ln xy = \ln x + \ln y$

   (c) $(e^a)^b = e^{ab} \Leftrightarrow \ln x^y = y \ln x$

   [Beispiel für a] Da $x \geq 0$ kann man es schreiben als $x = e^{\ln x}$.
   $\Rightarrow \ln \frac{1}{x} = \ln \frac{1}{e^{\ln x}} = \ln e^{-\ln x} = -\ln x$.

3. ***Berlusconi*** Wir schreiben das Jahr 2020. Berlusconi steht vor Gericht. Endlich. Sein Vermögen hat er fast vollständig für Frauen, Autos und Alkohol ausgegeben. Den Rest hat er einfach verprasst. Nach endlosen Bitten leiht ihm ein Freund eine Million und durch alte Verbindungen bekommt er 1.5 % Zinsen pro Tag, die täglich zum verzinsten Kapital hinzugefügt werden. Schafft er es die nötigen 2 Millionen Bestechungsgeld bis zur Urteilssprechung in 60 Tagen anzusparen?

4. ***Nascar*** Ein Nascar Autorennen geht immer im Kreis. Die Kunst besteht darin geschickt nach links zu lenken. Das Rennen startet bei $x = 1000m, y = 0m$ und geht in der x-y-Ebene gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung. Die Autos fahren konstant $v = 30\frac{m}{s}$.

   (a) Wann erreichen die Autos zum ersten Mal $x = -800m$?

   (b) Wann kommen Sie zum zweiten Mal zu $y = -200m$?

5. ***Schrödingers Katze*** Der wahnsinnige Doktor Fred hat Schrödingers Katzenexperiment nachgebaut. Hier wird eine Katze in eine Box gesperrt zusammen mit einer Tötungsapperatur. Diese tötet die Katze wenn das darin enthaltene Atom zerfällt. Um das Experiment genehmigt zu bekommen musste Fred Uran mit einer Halbwertszeit von ungefähr $4 \cdot 10^9$Jahren benutzen. Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Atom zerfällt nach $4 \cdot 10^9$Jahren 50 % beträgt. Nach zwei Stunden befreit Dave mit zwei Freunden die verängstigte Katze. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese schon tot ist?

6. ***Gauß-Glocke*** Ein grauhaariger, etwas verwirrt dreinblickender Mann an einer dürftig beleuchteten Straßenecke bietet euch folgendes Spiel an. Ihr zahlt 5 Euro als Wetteinsatz und bekommt Geld nach folgender Gauß-Verteilung ausgezahlt oder müsst nachzahlen.

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^6}{\pi}} e^{-1 \cdot 10^{-6}(x-5)^2}$$

   (a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit 1000 Euro zu gewinnen?

   (b) Ist das Spiel fair? (Hinweis: Symmetrie)

   (c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit unendlich reich oder unendlich verschuldet zu werden?

7. ***Sinus hyperbolicus*** Leiten Sie folgende Rechenregeln für die Funktionen $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ her:

   (a) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

   (b) $\cosh(x + y) = \sinh x \sinh y + \cosh x \cosh y$

   (c) $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$

   (d) $(\sinh x)^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$

8. ***Polynome*** Gegeben sei das Polynom $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$.

   (a) Finden Sie die Nullstellen.

   (b) Schreiben Sie das Polynom in der Form $f(x) = (x - a)(x - b)$....

   (c) Ist eine derartige Zerlegung für alle Polynome möglich?

9. ***Speedy Pong*** 1980 war reichlich langweilig. Coole Computerspiele waren noch nicht erfunden. Monkey Island 1 ließ noch 10 Jahre auf sich warten. Linus Torvalds saß eines Abends mal wieder gelangweilt in der Garage. Plötzlich hatte er eine brillante Idee. Nach einigem Basteln hatte er einen Pong-Cluster aufgebaut, der es erlaubte Pong mit immer höherer Geschwindigkeit zu spielen. Die Bewegung des Balls verläuft nach folgender Kurve: $f(t) = \cos(e^t)$.

   (a) Wann überquert der Ball zum 5. Mal die Mittellinie($f(t) = 0$)?

   (b) Wann kommt er zum 2. Mal unten an?