Quantenmechanik 1

(SS 2012, Bachelor, FU Berlin)

1. Uebungsblatt

Abgabe am 20.4., 10 ct

Übungsaufgaben

1. **Bra-Ket Notation**
   In der Vorlesung wurde die Bra-Ket, oder Dirac-Notation eingeführt. Wir betrachten den dreidimensionalen komplexen Hilbertraum mit der Orthonormalbasis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ und definieren die folgenden Ket-Vektoren:

   $$|\alpha\rangle := 3|1\rangle - \mathrm{i}|2\rangle + 4|3\rangle \qquad |\beta\rangle := 3\mathrm{i}|1\rangle + 3|2\rangle$$

   (a) Gib die Bra-Vektoren $\langle\alpha|$ und $\langle\beta|$ an.

   (b) Berechne die Skalarprodukte $\langle\alpha|\beta\rangle$ und $\langle\beta|\alpha\rangle$.

   (c) Berechne die Darstellungsmatrix von $|\alpha\rangle\langle\beta|$ in der oben eingeführten Basis. Nenne zwei Eigenschaften die sie nicht hat.

2. **Diagonalisierung**
   Eine allgemeine hermiteschen 2×2 Matrix M kann geschrieben werden als

   $$M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma^* & \beta \end{pmatrix}$$

   mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{C}$. Berechne die Eigenwerten von M. Welche Eigenschaften haben sie?

3. **Operatoren und Kommutatoren**

   (a) Der Kommutator zweier Matrizen A, B ist definiert als $[A, B] := AB - BA$. Zeige, dass für beliebige Matrizen A, B, C folgende zwei Eigenschaften gelten:
      (i) $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$
      (ii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jakobi Identität)

   (b) Zeige, dass für jede invertierbare Matrix S und beliebige Matrix A

   $$\mathrm{Tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{Tr}(A), \tag{1}$$

   das heißt insbesondere, dass die Spur einer linearen Abbildung basisunabhängig ist.
   Hinweis: Zeige zuerst dass $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

   (c) Zeige für beliebige Matrizen A, B, dass $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

   (d) Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass das Produkt zweier hermitescher Matrizen wieder hermitesch ist.

4. **Spezielle Operatoren**
   Die Matrixexponentialfunktion einer Matrix A ist definiert durch die Reihendarstellung

   $$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

(a) Es sei

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne mit Hilfe der Darstellung der Matrixexponentialfunktion den Ausdruck $\exp(\mathrm{i}\sigma_x t),\ t \in \mathbb{R}$ und bringe ihn in eine geschlossene Form.

(b) Zeige, dass $\exp(\mathrm{i}\sigma_x t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ unitär ist.
Freiwillig: Ist dies an Stelle von σ_x auch für allgemeine hermitesche Matrizen der Fall?

Präsenzaufgaben

1. **Pauli-Matrizen**
Die Pauli-Matrizen sind gegeben als

$$\sigma_0 = \mathbb{1} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeige, dass die Pauli-Matrizen linear unabhängig sind.

(b) Welche weiteren grundlegenden Eigenschaften haben sie?

(c) Verifiziere (anhand von Beispielen), dass

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{i,j} \mathbb{1} + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k} \sigma_k \tag{2}$$

(d) Verifiziere, dass für $i, j = 1, 2, 3$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k} \sigma_k \tag{3}$$

(e) Zeige, dass sich jede 2×2-Matrix M in der Form $M = \sum_{i=0}^{3} c_i \sigma_i$ ausdrücken lässt. Wie kann man die c_i berechnen?

2. **Stern-Gerlach Experiment**
In der Vorlesung wurden der Zustand $|0\rangle$ und der Zustand $|1\rangle$ als Spin up und Spin down eingeführt. Wie kann, mit Hilfe der Pauli-Matrizen, der Aufbau von Stern-Gerlach Boxen formalisiert werden?