

Analytische Mechanik (20113401)

Vorlesender: Jens Eisert

Kapitel 2: Energie und Arbeit



Inhaltsverzeichnis

2	Energie und Arbeit	5
2.1	Vorbemerkungen	5
2.2	Mathematisches Intermezzo	5
2.2.1	Vektorräume	5
2.2.2	Bezugssysteme und orthogonale Matrizen	6
2.2.3	Wegintegrale	7
2.2.4	Konservative Vektorfelder	8
2.3	Der Energiesatz	10
2.3.1	Energie	10
2.3.2	Arbeit	11
2.4	Beispiele für den Energiesatz	12
2.4.1	Homogene Kraftfelder	12
2.4.2	Harmonische Kräfte	12
2.4.3	Gravitationskräfte	13
2.4.4	Eindimensionale Probleme	13
2.4.5	Nichtkonservative Kräfte	14

Kapitel 2

Energie und Arbeit

2.1 Vorbemerkungen

Im letzten Kapitel haben wir die Newtonschen Gesetze kennengelernt und uns einige wichtige Kraftgesetze angesehen. In diesem Kapitel und im folgenden Kapitel wollen wir weitere Konsequenzen dieser Gesetze ausloten. Wir werden hier den Energiesatz kennenlernen, der – ausgestattet mit dem passenden Rüstzeug – zum Einzeiler wird. Dies erfordert allerdings einiges an Vorbereitung: Um dies zu ermöglichen, werden wir ein erstes mathematisches Intermezzo einflechten, um uns für weitere Schritte vorzubereiten. Spannendere Vielteilenprobleme werden wir uns im folgenden Kapitel ansehen.

2.2 Mathematisches Intermezzo

In diesem Kapitel werden einige mathematische Grundlagen diskutiert. Manche elementare Begriffe wurden oben zwar bereits vorweggenommen, dies aber, um das Augenmerk erst einmal auf die physikalischen Phänomene zu richten. Wir werden immer wieder, wenn nötig, mathematische Grundlagen einflechten.

2.2.1 Vektorräume

Wir bleiben dabei, dass wir nur die (elementare) Mathematik einführen, die wir auch wirklich brauchen. Die Physik, die wir betrachten, findet im dreidimensionalen Raum statt. Wählen wir einen Ursprung \mathbf{U} und eine *Basis* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, so kann man einen beliebigen Punkt als $\mathbf{U} + \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ darstellen. Die *Komponenten* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ bilden hier einen reellen Vektor. Vektoren erfüllen die *Vektorraumaxiome* eines Vektorraums V , hier $V = \mathbb{R}^3$:

- Die *Vektoraddition* $V \times V \rightarrow V$ erfüllt das *Assoziativgesetz*, also gilt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$
$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \quad (2.1)$$
- es existiert ein *neutrales Element* 0 , so dass $0 + \mathbf{x} = \mathbf{x} + 0 = \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in V$,

- für jedes $\mathbf{x} \in V$ gibt es ein *inverses Element* $-\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = 0$,
- und es ist *kommutativ*, als $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Außerdem erfüllt die Skalarmultiplikation für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

- $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$,
- $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{x}) + (\beta\mathbf{x})$,
- $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$,
- und $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Führt man im Vektorraum, hier $V = \mathbb{R}^3$, ein *Skalarprodukt* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ein, das

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$,
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$,
- $\mathbf{x} \cdot (\alpha\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$,
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ und $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$

erfüllt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, wird der \mathbb{R}^3 auch ein *euklidischer Raum*. Die Norm $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, definiert als

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad (2.2)$$

erfüllt die Dreiecksungleichung

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \quad (2.3)$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, hat man einen Abstandsbegriff. Offensichtlich haben wir ihn oben im Gravitationsgesetz und im Coulombgesetz bereits verwendet. Wichtig ist auch die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*: Für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ist

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|. \quad (2.4)$$

Diese einfach aussehende Ungleichung ist erstaunlich praktisch.

2.2.2 Bezugssysteme und orthogonale Matrizen

Wichtig sind in der analytischen Mechanik *affine Koordinatensysteme*. Wenn wir einen Ursprung eines Koordinatensystems \mathbf{U} festlegen, und die Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, kann wie gesagt ein Punkt als $\mathbf{U} + \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ geschrieben werden. Wenn man von einem affinen Koordinatensystem zu einem anderen übergeht,

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 A_{j,i} \mathbf{e}'_j \quad (2.5)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, als Entwicklung der alten Basisvektoren in den neuen Basisvektoren $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, und kann man den Vektor $\mathbf{U}' - \mathbf{U}$ schreiben als

$$\mathbf{U}' - \mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{e}_i \quad (2.6)$$

so lauten die Koordinaten im Übergang von $(\mathbf{U}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ zu $(\mathbf{U}', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$

$$x'_j = c_j + \sum_{i=1}^3 A_{j,i} x_i. \quad (2.7)$$

Besonders wichtig sind solche Transformationen, die abgesehen von einer möglichen Spiegelung Drehungen entsprechen. Dann gilt für $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A^T A = A A^T = \mathbb{1}, \quad (2.8)$$

und die Matrix ist *reell orthogonal* $A \in O(3)$. Solche Transformationen sind besonders wichtig, da sie *Orthonormalbasen*, für die

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j} \quad (2.9)$$

gilt für $i, j = 1, \dots, 3$, wiederum in Orthonormalbasen abbilden. Letztere bildet eine Gruppe, die reelle orthogonale Gruppe. Wir werden ihr häufig begegnen. Etwa kann man eine beliebige symmetrische Matrix $M = M^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalisieren als

$$A M A^T = D, \quad (2.10)$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist, auf deren Hauptdiagonale die *Eigenwerte* von M stehen.

2.2.3 Wegintegrale

Was wir gleich auch noch brauchen werden, sind Wegintegrale. Wir können sie wie folgt motivieren. Betrachten wir einen Massenpunkt der Masse m in einem Kraftfeld, das nur vom Ort abhängt, wie oben beschrieben als

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)). \quad (2.11)$$

Die Bewegungsgleichungen nach dem zweiten Newtonschen Gesetz lauten dann

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)). \quad (2.12)$$

Wenn wir nun das Skalarprodukt mit $\dot{\mathbf{r}}(t)$ bilden, so erhält man

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t). \quad (2.13)$$

Wenn wir diese Gleichung zwischen den Zeiten $t_1, t_2 > 0$ integrieren, finden wir für die linke Seite

$$\begin{aligned} m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt &= \frac{1}{m} m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}(t))^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}}(t))^2 \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= T(t_2) - T(t_1), \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei

$$T(t) := \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}}(t))^2, \quad (2.15)$$

wie wir diesen Ausdruck gleich in der Rolle einer kinetischen Energie kennenlernen werden. Für die rechte Seite ergibt sich das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) dt. \quad (2.16)$$

Selbstredend ist $[t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ für $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ eine parametrisierte Kurve, die wir K nennen. Nennen wir $\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}(t_1)$ und $\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}(t_2)$, so schreiben wir Gl. (2.17) auch als

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) dt = \int_{\mathbf{r}_1, K}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.17)$$

Letzteres ist ein *Wegintegral*. So, wie es definiert ist, wird es im allgemeinen nicht nur vom Anfangspunkt \mathbf{r}_1 und Endpunkt \mathbf{r}_2 abhängen, sondern vom gesamten Pfad K . Genauer wird es von der Bahnkurve abhängen und im Vorzeichen von der Durchlaufrichtung, aber nicht von der Parametrisierung der Kurve. Wenn wir eine differenzierbare umkehrbare Funktion $\tau \mapsto h(\tau) = t$ betrachten mit $\tau_1 \mapsto t_1$ und $\tau_2 \mapsto t_2$, so ist

$$\begin{aligned} \int_{h^{-1}(t_1)}^{h^{-1}(t_2)} \mathbf{g}(\mathbf{r}(h(\tau))) \cdot \frac{d}{d\tau}\mathbf{r}(h(\tau)) d\tau &= \int_{h^{-1}(t_1)}^{h^{-1}(t_2)} \mathbf{g}(\mathbf{r}(h(\tau))) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(h(\tau)) \frac{dh(\tau)}{\tau} d\tau \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt, \end{aligned} \quad (2.18)$$

was eben heißt, dass die Anfangs- und Endpunkte, der Pfad, die Durchlaufrichtung und natürlich der Integrand, das Vektorfeld, aber nicht die Parametrisierung das Integral bestimmen.

2.2.4 Konservative Vektorfelder

Der interessante Punkt ist der, dass für viele Vektorfelder, also hier Kraftfelder, das Wegintegral gar nicht vom dem Pfad abhängen wird, sondern lediglich vom Anfangspunkt \mathbf{r}_1 und Endpunkt \mathbf{r}_2 . Zunächst ist ein *Vektorfeld* im \mathbb{R}^3 eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ als $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$, etwa wie das Kraftfeld. Ein differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ heißt *konservativ*, wenn Wegintegrale nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, aber unabhängig vom Weg ist, also bei dem

$$\int_{\mathbf{r}_1, K}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.19)$$

von K unabhängig ist. Selbstredend wird dies für uns vor allem für Kraftfelder interessant sein. Um die Diskussion und die Notation zu vereinfachen, werden wir die Zeitunabhängige Situation ansehen.

Man sieht sofort, dass ein Vektorfeld genau dann konservativ ist, wenn das Wegintegral über jeden geschlossenen Weg verschwindet. Dies ist sofort zu sehen: Seien K_1

und K_2 zwei parametrisierte Kurven, die \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 verbinden und sei \mathbf{v} konservativ, so ist

$$\int_{\mathbf{r}_1, K_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1, K_2}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_2, -K_2}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.20)$$

so dass das Wegintegral über die vorwärts gelesene Kurve K_1 und rückwärts gelesene Kurve verschwindet. Hat man eine beliebige geschlossene Kurve vorliegen, kann man die Kurve in Teile aufteilen und obiges Argument in umgekehrter Reihenfolge lesen. Dieses Kriterium ist sehr interessant, allerdings nicht sehr operationell, da man nicht alle geschlossenen Pfade durchgehen kann.

Eine andere Charakterisierung von konservativen Vektorfeldern ist die folgende: Ein differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ ist genau dann konservativ, wenn es ein *skalares Feld* $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}). \quad (2.21)$$

Ein solches skalares Feld heißt dann *Potentialfeld*. Der *Gradient* ist hier selbst ein Vektorfeld, definiert als Vektor der partiellen Ableitungen

$$\nabla U(\mathbf{r}) := \left(\frac{\partial U}{\partial r_1}, \frac{\partial U}{\partial r_2}, \frac{\partial U}{\partial r_3} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial r_i} \mathbf{e}_i, \quad (2.22)$$

wenn (r_1, r_2, r_3) die Koordinaten einer Orthonormalbasis sind. Der Gradient gibt also die Änderungsrichtung an.

Dieses Kriterium ist schon praktischer, da man mit Angabe eines solchen skalaren Feldes gezeigt hat, dass ein Vektorfeld konservativ ist. Auch dieses Kriterium ist leicht zu zeigen. Sei $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein solches skalares Feld und K eine parametrisierte Kurve, die \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 verbindet, mit einem Parameter t_1 und t_2 verbunden. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}_1, K}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{t_1}^{t_2} \nabla U(\mathbf{r}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} ds \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} ds \frac{d}{ds} U(\mathbf{r}(s)) \\ &= -(U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)), \end{aligned} \quad (2.23)$$

was offensichtlich vom Weg unabhängig ist, wobei wir im ersten Schritt konkret das Skalarprodukt ausgewertet haben. Ist umgekehrt ein Wegintegral vom Weg unabhängig, können wir

$$U(\mathbf{r}(t)) := - \int_{\mathbf{r}_1, K}^{\mathbf{r}(t)} \mathbf{v}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \quad (2.24)$$

schreiben, wobei K eine parametrisierte Kurve ist, die \mathbf{r}_1 mit $\mathbf{r}(t)$ verbindet. So ist

$$U(\mathbf{r}(t)) = - \int_{t_1}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} ds \quad (2.25)$$

und also

$$\frac{d}{dt} U(\mathbf{r}(t)) = - \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \nabla U(\mathbf{r}(t)) = -\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}. \quad (2.26)$$

Dies meint nichts anderes als

$$(\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) + \nabla U(\mathbf{r}(t))) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 0. \quad (2.27)$$

Da aber wegen der Beliebigkeit des Weges $d\mathbf{r}(t)/dt$ beliebig ist, muss

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = -\nabla U(\mathbf{r}(t)) \quad (2.28)$$

gelten, was wir zeigen wollen. Es sollte nach Konstruktion allerdings auch klar sein, dass U durch \mathbf{v} nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, denn jene fällt bei einer Ableitung im Gradienten einfach heraus.

Das praktischste aller Kriterien für die Konservativität eines Vektorfeldes ist wie folgt: Das differenzierbare Vektorfeld $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ ist genau dann konservativ, wenn

$$(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.29)$$

für alle $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ist. $\nabla \times \mathbf{v}$ ist hier tatsächlich durch das Kreuzprodukt definiert, und wird *Rotation* genannt und manchmal auch als $\text{rot}(\mathbf{v})$ abgekürzt. Dies ist wieder ein Vektorfeld, definiert durch

$$(\nabla \times \mathbf{v}) := \left(\frac{\partial v_3}{\partial r_2} - \frac{\partial v_2}{\partial r_3}, \frac{\partial v_1}{\partial r_3} - \frac{\partial v_3}{\partial r_1}, \frac{\partial v_2}{\partial r_1} - \frac{\partial v_1}{\partial r_2} \right). \quad (2.30)$$

Wir werden uns nur eine Beweisrichtung vorknöpfen: Ist $\mathbf{v} = -\nabla U(\mathbf{r})$ für ein passendes skalares Feld $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, so ist

$$v_j = -\frac{\partial U}{\partial r_j} \quad (2.31)$$

und

$$\frac{\partial v_i}{\partial r_j} - \frac{\partial v_j}{\partial r_i} = -\frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j} + \frac{\partial^2 U}{\partial r_j \partial r_i}. \quad (2.32)$$

Dies ist erlaubt, weil \mathbf{v} differenzierbar und U zweimal differenzierbar ist. Wegen der Symmetrie der zweiten Ableitungen ist dann $\nabla \times \mathbf{v} = 0$.

2.3 Der Energiesatz

2.3.1 Energie

Nach diesem langen – ich hoffe, nicht zu langen – mathematischen Intermezzo können wir wieder zu Wegintegralen über Kraftfelder zurückkehren, wie in den Newtonschen Gesetzen vorgesehen. Hier zeigt sich aber, dass sich die Vorarbeiten gelohnt haben und das Ernten sehr schnell geht. Dies reflektiert auch die historische Einsicht, warum Entwicklung von (aus heutiger Sicht elementarer) Mathematik nötig war, um zu Schlüssen zu kommen. Ist $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{r})$ nun ein konservatives Kraftfeld, ist also

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (2.33)$$

für ein passendes skalares Feld U , so gilt natürlich für Kurven mit $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2$

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2). \quad (2.34)$$

Das ist deswegen interessant, weil dann

$$T(t_2) - U(\mathbf{r}(t_2)) = T(t_1) - U(\mathbf{r}(t_1)). \quad (2.35)$$

Diese Einsicht ist uns einen Kasten wert.

Energiesatz: Für Körper unter konservativen Kraftfeldern ist die *Gesamtenergie*

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}}(t))^2 + U(\mathbf{r}(t)) \quad (2.36)$$

eine erhaltene Größe, die sich zum Zeitpunkt $t \geq 0$ in *kinetische Energie*

$$T(t) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}}(t))^2 \quad (2.37)$$

und *potentielle Energie* $U(\mathbf{r}(t))$ bilanziert.

In der klassischen Mechanik ist also die Gesamtenergie von Körpern eine erhaltene Größe. Wir werden diese Einsicht im nächsten Kapitel für Vielteilchensysteme kennenlernen, und viel später in der statistischen Physik als Einsicht, die dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik entspricht. Während der Bewegung in einem konservativen Kraftfeld wird also einem Körper weder Energie genommen noch gegeben. In nichtkonservativen Kraftfeldern ist das schon möglich: Wenn man etwa von außen ein Kind auf einer Schaukel Anschwung gibt, ist offensichtlich hinterher mehr Energie im System.

Es ist auch wichtig zu beobachten, dass es die Gesamtenergie ist, die erhalten ist. Die potentielle Energie und die kinetische Energie können sich ineinander überführen. Wir werden dies gleich am Beispiel einer Feder diskutieren.

2.3.2 Arbeit

Das Wegintegral

$$A := \int_{\mathbf{r}_1, K}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.38)$$

nennt man auch *Arbeit* von der Kraft am Körper entlang der Bahn K – auch für nicht-konservative Kräfte. Tatsächlich ist die Arbeit für konservative Kräfte gleich der negativen Änderung der potentiellen Energie.

Nicht alle Kräfte leisten Arbeit, übrigens: Die Lorentz-Kraft haben wir im ersten Kapitel als

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (2.39)$$

kennengelernt. Für diese Kraft gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = e\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.40)$$

Das Magnetfeld leistet also niemals Arbeit. Wenn das elektrische Feld \mathbf{E} als Vektorfeld auch konservativ ist, ist die von der Lorentz-Kraft geleistete Arbeit gerade gleich der Differenz der potentiellen Energie.

2.4 Beispiele für den Energiesatz

2.4.1 Homogene Kraftfelder

In der Tat sind konservative Kraftfelder eher die Regel als die Ausnahme und Beispiele sind ubiquitär. Das einfachste aller Beispiele ist das konservative Kraftfeld. Das passende Potential zum Kraftfeld läßt sich auch sehr leicht finden. Das zum Kraftfeld $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{C} \quad (2.41)$$

geeignete Potential ist

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{r} + c \quad (2.42)$$

für eine reelle Konstante c . Hier zeigt sich auch die Nützlichkeit des oben genannten Kriteriums: Man muss ja nur ein Potential geeignet "raten", um herauszufinden, ob ein vorgegebenes Kraftfeld konservativ ist. Wir können schnell nachweisen, dass dies in der Tat ein passendes Potential ist:

$$\nabla(\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial r_2} \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial r_3} \mathbf{C} \cdot \mathbf{r} \right) = \mathbf{C}. \quad (2.43)$$

Natürlich ist das Schwerfeld der Erde in der Nähe der Erdoberfläche hierfür ein gutes Beispiel, für das $\mathbf{C} = m\mathbf{G}$ und so

$$U(\mathbf{r}) = -m\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}. \quad (2.44)$$

Wenn wir $\mathbf{G} = (0, 0, -G)$ wählen, ist so

$$U(\mathbf{r}) = mGr_3. \quad (2.45)$$

Das Potential ist also nichts anderes als die Höhe, vielleicht wenig überraschend.

2.4.2 Harmonische Kräfte

Harmonische Kräfte sind besonders interessant. Hier ist ja

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -D\mathbf{r}. \quad (2.46)$$

Ein passendes Potential ist also

$$U(\mathbf{r}) = \frac{D}{2} \mathbf{r}^2. \quad (2.47)$$

Hier ist noch ein Aspekt interessant. Wenn wir eine Bewegung ansehen

$$\mathbf{r}(t) = c \sin(\omega t) \mathbf{v}, \quad (2.48)$$

wiederum mit

$$\omega^2 = \frac{D}{m}, \quad (2.49)$$

dann ist für $t = 0$ die Auslenkung $\mathbf{r} = 0$. Die kinetische Energie ist dann maximal. Zum Zeitpunkt, an dem $\omega t = \pi/2$ ist, also für $t = \pi/(2\omega)$ ist die kinetische Energie $T(t) = 0$, aber die potentielle Energie maximal, als

$$U(\mathbf{r}(t)) = U(\mathbf{v}) = \frac{D}{2} \mathbf{v}^2. \quad (2.50)$$

So ergibt sich sofort auch der Wert der kinetischen Energie bei $t = 0$ ohne Rechnung zu

$$T(0) = \frac{D}{2} \mathbf{v}^2. \quad (2.51)$$

Die kinetische Energie wird also vollends in potentielle umgewandelt, und wieder in kinetische: Die Gesamtenergie bleibt bei Abwesenheit von *Reibung* allerdings erhalten. Wie dies schon nahelegt, ist die Reibungskraft nicht konservativ: Es ist ja auch die Gesamtenergie nicht erhalten und ein bewegter Körper kommt von selbst zur Ruhe nach einiger Zeit.

2.4.3 Gravitationskräfte

Die Gravitationskraft ist auch konservativ. Das Potentialfeld ist hier schnell identifiziert, es lautet

$$U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|}, \quad (2.52)$$

als $1/|\mathbf{r}|$ im Sinne der obigen Norm skalierenden Abstandsgesetz. Man sieht gleich, dass dies ein passendes potential zum konservativen Kraftfeld der Gravitationskraft ist. In der Tat sind alle *rotationssymmetrischen Zentralkraftfelder*

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = s(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (2.53)$$

mit differenzierbaren Funktionen $s : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ konservativ.

2.4.4 Eindimensionale Probleme

Für eindimensionale Probleme, für die die Koordinate $r \in \mathbb{R}$ ist, ist $r \mapsto K(r)$ immer konservativ. Man kann dann immer eine Stammfunktion von $-K$ finden, also ein U angeben, so dass

$$F(r) = -\frac{d}{dr} U(r). \quad (2.54)$$

Dann ist, wie immer bei konservativen Problemen, die Energie erhalten als

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}(t)^2 + U(r(t)). \quad (2.55)$$

Das ist deswegen interessant, weil wir dies nutzen können, um die Bewegungsgleichung zu lösen. Wir können die Energieerhaltung umformen zu

$$\dot{r}(t) = \pm \left(\frac{2}{m} (E - U(r(t))) \right)^{1/2}. \quad (2.56)$$

Wählen wir das positive Vorzeichen aus, ergibt dies in der Zeit integrieren zwischen 0 und t

$$\int_0^t ds \dot{r} \left(\frac{2}{m} (E - U(r(s))) \right)^{-1/2} = \int_{r(0)}^r dx \left(\frac{2}{m} (E - U(x)) \right)^{-1/2} = \int_0^t ds = t, \quad (2.57)$$

wobei wir die Substitutionsregel angewendet haben. So ist die Gleichung immer lösbar, und eindimensionale Probleme haben eine geschlossene Lösung. Wir werden in den Übungen sehen, wie dies nutzbar ist.

2.4.5 Nichtkonservative Kräfte

Es sind, auch wenn konservative Kräfte recht häufig sind, nicht alle Kräfte konservativ. Etwa ist ein nichtkonservatives Kraftfeld eines, bei dem

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = (r_2, -r_1, 0), \quad (2.58)$$

wobei wie oben $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ ist. Wir können dies sofort sehen: Es gilt

$$\nabla \times \mathbf{g} = (0, 0, -2), \quad (2.59)$$

also ist das Vektorfeld nicht rotationsfrei. Hier sehen wir auch, wie die obigen Kriterien am besten zu nutzen sind. Wollen wir zeigen, dass ein Kraftfeld konservativ ist, konstruiert man in aller Regel ein Potentialfeld und zeigt, dass sich das Kraftfeld als dessen Gradient ergibt. Will man dagegen zeigen, dass ein Kraftfeld nicht konservativ ist, ist dieser Weg offensichtlich verschlossen: Dann genügt ein Punkt, an dem die Rotation nicht verschwindet.