Analytische Mechanik (20113401)
Vorlesender: Jens Eisert.
Kapitel 4: Drehimpuls, die Keplerschen Gesetze und der Virialsatz

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 4

Drehimpuls, die Keplerschen Gesetze und der Virialsatz

4.1 Vorbemerkungen

Über den Impuls hinaus, den wir als wichtige Größe im letzten Kapitel kennengelernt haben, gibt es eine weitere Größe, die enorm wichtig ist, und die wir in ähnlicher Weise bilanzieren können. Dies ist der Drehimpuls. Ihn werden wir kennenlernen, den Drehimpulserhaltungssatz vor Augen führen, die Keplerschen Gesetze herleiten. Am Ende des Kapitels wird der Virialsatz stehen, bevor wir uns der Lagrangeschen Mechanik zuwenden wollen.

4.2 Drehimpuls und Drehmoment

4.2.1 Drehimpulserhaltung

Wir betrachten zunächst wieder ein Punktteilchen, bevor wir uns Vielteilchensysteme ansehen. Der *Drehimpuls* zur Zeit $t \geq 0$ ist für einen Körper am Ort $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ mit Impuls $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\mathbf{L}(t) := \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t). \tag{4.1}$$

Die Ableitung dieser Größe in der Zeit ist das *Drehmoment*

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &:= \dot{\mathbf{L}}(t) \qquad (4.2) \\ &= m\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + m\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \\ &= m\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t). \end{aligned}$$

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist also

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t), \tag{4.3}$$

das Drehmoment der Kraft (bezogen auf den gewählten Ursprung, für den $\mathbf{r}(t)$ zum Zeitpunkt t die Koordinaten sind). Ein Drehmoment als Folge einer angelegten Kraft bewirkt also die Änderung eines Drehmoments. Wenn diese Kraft die Folge eines Kraftfeldes ist, so ist

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)). \tag{4.4}$$

Drehimpulserhaltungssatz für Punktteilchen: Der Drehimpuls ist erhalten, wenn $\mathbf{N}(t) = 0$ gilt für alle Zeiten. Für Punktteilchen in Kraftfeldern ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Zentralkraftfeld ist.

Letzteres meint, dass $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ stets parallel zu $\mathbf{r}$ ist, weswegen dann das Drehmoment verschwindet. In dieser Situation ist

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{L} \tag{4.5}$$

konstant für alle Zeiten $t \geq 0$ und bereits durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

4.2.2 Drehimpuls für Vielteilchensysteme

Für Vielteilchensysteme aus n Körpern kann man für jeden einen Drehimpuls definieren

$$\mathbf{L}_j(t) := m_j \mathbf{r}_j(t) \times \dot{\mathbf{r}}_j(t). \tag{4.6}$$

für $j = 1, \ldots, n$, und ebenso den *Gesamtdrehimpuls*

$$\mathbf{L}(t) := \sum_{j=1}^{n} \mathbf{L}_j(t), \tag{4.7}$$

analog zum Gesamtimpuls. In der Zeit verändert er sich als

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}(t) &= \sum_{j=1}^{n} \dot{\mathbf{L}}_j(t) \qquad (4.8)\\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j(t) \times \dot{\mathbf{r}}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{r}_j(t) \times \ddot{\mathbf{r}}_j(t), \end{aligned}$$

wobei der erste Term des letzten Ausdrucks verschwindet. Wenn nun

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j(t) = \mathbf{F}_j(\mathbf{r}_j(t)) + \sum_{k=1, k\neq j}^{n} \mathbf{F}_{j,k}(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t)) \tag{4.9}$$

ist, so folgt

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j(t) \times \mathbf{F}_j(\mathbf{r}_j(t)) + \sum_{j,k=1, k\neq j}^{n} \mathbf{r}_j(t) \times \mathbf{F}_{j,k}, \tag{4.10}$$

wobei wir auf der rechten Seite das Argument weggelassen haben zur Transparenz der Notation. Dieser letzte Term kann auch geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1,k\neq j}^{n} \mathbf{r}_j(t)\times\mathbf{F}_{j,k} &= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}(\mathbf{r}_j(t)\times\mathbf{F}_{j,k}+(\mathbf{r}_k(t)\times\mathbf{F}_{k,j}) \qquad (4.11)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}(\mathbf{r}_j(t)-\mathbf{r}_k(t))\times\mathbf{F}_{j,k}, \qquad (4.12)\end{aligned}$$

wiederum das dritte Newtonsche Gesetz verwendend. Sind nun alle Kräfte $\mathbf{F}_{j,k}$ parallel zu $\mathbf{r}_j(t)-\mathbf{r}_k(t)$, so verschwindet dieser Term, und es gilt dann

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{r}_j(t)\times\mathbf{F}_j(\mathbf{r}_j(t)) =: \sum_{j=1}^{n}\mathbf{N}_j(t) =: \mathbf{N}(t). \qquad (4.13)$$

Dies meint, dass wenn die inneren Kräfte $\mathbf{F}_{k,j}$ entlang der Verbindungslinie zwischen Körpern gerichtet sind, was in allen praktisch relevanten Situationen der Fall ist, tragen jene nicht zur Drehimpulsbilanz bei. So ist die Änderung des Gesamtdrehimpulses alleine durch das gesamte Drehmoment der äußeren Kräfte gegeben.

Allgemeiner Drehimpulserhaltungssatz: In abgeschlossenen Systemen ist der Gesamtdrehimpuls erhalten.

Wichtig ist zu bemerken, dass der Drehimpuls vom Ursprung des Koordinatensystems abhängt. Allerdings ist der allgemeine Drehimpulserhaltungssatz, dass in abgeschlossenen Systemen ist der Gesamtdrehimpuls erhalten ist, unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, da in dem obigen Argument ja nur Differenzen von Ortsvektoren auftauchen. Also gilt für jeden Ursprung der allgemeine Drehimpulserhaltungssatz für abgeschlossene Systeme.

4.2.3 Drehimpulsbilanz

Wie auch den Impuls kann man den Drehimpuls zerlegen in einer Bilanz in einen Schwerpunktanteil und einen der Relativbewegung. Wir haben ja

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(t) &= \sum_{j=1}^{n} m_j\mathbf{r}_j(t)\times\dot{\mathbf{r}}_j(t) \qquad (4.14)\\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j(\mathbf{R}(t)+\mathbf{x}_j(t))\times(\mathbf{R}(t)+\dot{\mathbf{x}}_j(t)).\end{aligned}$$

Dies ist aber wiederum

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(t) &= \mathbf{R}(t) \times \mathbf{P}(t) && (4.15)\\
&+ \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{x}_j(t) \times \dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{R}(t) \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{x}}_j(t)\\
&+ \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{x}_j(t) \times \dot{\mathbf{x}}_j(t). && (4.16)
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{x}_j(t) = 0 \qquad (4.17)$$

nach Definition der Schwerpunktbewegung, und so verschwinden der zweite und der dritte Term in Gleichung (4.15). So ist der Gesamtdrehimpuls bilanzierbar in den Drehimpuls der Schwerpunktsbewegung

$$\mathbf{L}_S(t) = \mathbf{R}(t) \times \mathbf{P}(t) \qquad (4.18)$$

und den Drehimpuls der Relativbewegung

$$\mathbf{L}_R(t) = \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{x}_j(t) \times \dot{\mathbf{x}}_j(t). \qquad (4.19)$$

Letzterer Relativanteil ist bezogen auf den Schwerpunkt als Zentrum. Das gesamte Drehmoment läßt sich in ähnlicher Weise bilanzieren als

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(t) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j(t) \times \mathbf{F}_j(t) && (4.20)\\
&= \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{R}(t) + \mathbf{x}_j) \times \mathbf{F}_j(t)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{R}(t) \times \mathbf{F}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_j(t)\\
&= \mathbf{N}_S(t) + \mathbf{N}_R(t). && (4.21)
\end{aligned}$$

Wenn wir die zeitliche Ableitung von $t \mapsto \mathbf{N}_S(t)$ berechnen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{L}_S(t) &= \dot{\mathbf{R}}(t) \times \mathbf{P}(t) + \mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{P}}(t) && (4.22)\\
&= m\dot{\mathbf{R}}(t) \times \dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{P}}(t)\\
&= \mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{P}}(t)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{R}(t) \times \mathbf{F}_j(t) = \mathbf{N}(t). && (4.23)
\end{aligned}$$

Weil ja für den Gesamtdrehimpuls

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{N}(t) \tag{4.24}$$

gilt, ist auch

$$\dot{\mathbf{L}}_R(t) = \mathbf{N}_R(t). \tag{4.25}$$

Das ist interessant: Dies meint, dass in einem abgeschlossenen System, nicht nur des Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{L}_S + \mathbf{L}_R$ zeitlich erhalten. Sondern der jeweilige Schwerpunkts- und Relativanteil sind zusätzlich getrennt erhalten.

4.3 Zweikörperprobleme

4.3.1 Drehimpulsbilanz für Zweikörperprobleme

Nun wollen wir vorläufig ein letztes Mal das Zweikörperproblem ansehen. Hier haben wir ja viel bereits vorbereitet. Wir erhalten für den relativen Anteil des Drehimpulses

$$\mathbf{L}_R = m_1 \mathbf{x}_1(t) \times \dot{\mathbf{x}}_1(t) + m_2 \mathbf{x}_2(t) \times \dot{\mathbf{x}}_2(t). \tag{4.26}$$

Weil nun mit $m = m_1 + m_2$

$$\mathbf{x}_1(t) = \frac{m_2}{m}\mathbf{r}(t) \tag{4.27}$$

und

$$\mathbf{x}_2(t) = -\frac{m_1}{m}\mathbf{r}(t) \tag{4.28}$$

gilt, folgt so

$$\mathbf{L}_R = \left(\frac{m_1 m_2^2}{m^2} + \frac{m_2 m_1^2}{m^2}\right)\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = \mu \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t). \tag{4.29}$$

Dies ist der Drehimpuls eines einzelnen Teilchens mit reduzierter Masse $\mu > 0$, ebenso wie der Impuls in einen Impuls der Schwerpunktsbewegung und den eines Teilchens mit Masse μ bilanzierbar war.

4.3.2 Allgemeine Zweikörperprobleme

Aber wir können noch weiter gehen, und zwar dies für allgemeine funktionale Abhängigkeiten $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, so dass man nach Abspalten der Schwerpunktsbewegung, die für die folgenden Zwecke nicht sehr interessant ist, als Bewegungsgleichung

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}(t) = -f(|\mathbf{r}(t)|)\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|} \tag{4.30}$$

vorliegen hat. Oben sahen wir, dass die Energie der relativen Bewegung

$$E_R = \frac{1}{2}\mu \dot{\mathbf{r}}(t)^2 + U(|\mathbf{r}(t)|) \tag{4.31}$$

lautet, und deren Drehimpuls in Gleichung (4.29) gegeben ist. Natürlich gilt

$$\dot{\mathbf{L}}_R(t) = \mu \mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = 0, \tag{4.32}$$

was meint, dass $\mathbf{L}_R$ ein zeitlich konstanter Vektor ist.

Wir wollen diese Einsicht nutzen, um weitere Kenntnis über die Bewegung zu erlangen. Es zeigt $\mathbf{r}(t)$ für alle Zeiten ja von einem Teilchen zum anderen. $\mathbf{L}_R$ steht senkrecht auf $\mathbf{r}(t)$. Da dies wiederum für alle Zeiten gilt, und ja $\mathbf{L}_R$ konstant ist, erfolgt die Bewegung des anderen Teilchens in einer Ebene, die senkrecht zu $\mathbf{L}_R$ steht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir diese Richtung in die 3-Koordinate, die 'z-Koordinate' unseres Koordinatensystems legen. Sowohl $\mathbf{r}(t)$ und $\dot{\mathbf{r}}(t)$ liegen also für alle Zeiten in der $1-2$-Ebene. Damit sind

$$r_3(0) = \dot{r}_3(0) = 0 \tag{4.33}$$

bereits festgelegt, zwei von insgesamt sechs Anfangsbedingungen für die Relativbewegung.

4.3.3 Fahrstrahlen und das zweite Keplersches Gesetz

Man kann so den die relative Bahnkurve $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ betrachten, wie sie in dt eine Fläche dA überstreicht. Man findet für dA

$$dA = \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|dt, \tag{4.34}$$

denn die Fläche ist die eines Dreiecks mit Seitenvektoren $\mathbf{r}(t)$ und $\dot{\mathbf{r}}(t)dt$ aufweist. Da die Fläche eines Dreiecks aber das halbe Produkt des Absolutbetrags des Vektors der Seitenvektoren ist, multipliziert mit dem Sinus des Winkels zwischen den Seitenvektoren, findet man

$$dA = \frac{1}{2\mu}|\mathbf{L}_R|dt. \tag{4.35}$$

Da aber $|\mathbf{L}_R|$ in der Zeit konstant ist, findet man die folgende Einsicht.

Fahrstrahlerhaltung: Der Fahrstrahl eines allgemeinen Zweikörperproblems überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Dies ist in der Tat die Aussage des *zweiten Keplerschen Gesetzes*, wenn man für f die Abhängigkeit der Gravitationskraft einsetzt. In der Tat gilt diese Abhängigkeit aber allgemeiner. Dieses Gesetz ist also nichts anderes als die Drehimpulserhaltung in einer besonderen Formulierung, und es gilt auch allgemeiner als von Kepler antizipiert. Es gilt für beliebige Zentralkraftfelder.

4.3.4 Zweikörperproblem in Polarkoordinaten

Tatsächlich sind für die Beschreibung von der Bewegung von Zweikörperproblemen Polarkoordinaten angemessen. So ist mit $r(t) = \mathbf{r}(t)$

$$r_1(t) = r(t)\cos\phi(t), \tag{4.36}$$

$$r_2(t) = r(t)\sin\phi(t), \tag{4.37}$$

und so erhalten wir

$$\dot{r}_1(t) = \dot{r}(t)\cos\phi(t) - r(t)\dot{\phi}(t)\sin\phi(t), \tag{4.38}$$
$$\dot{r}_2(t) = \dot{r}(t)\sin\phi(t) + r(t)\dot{\phi}(t)\cos\phi(t). \tag{4.39}$$

Es gilt auch

$$\dot{\mathbf{r}}(t)^2 = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\phi}(t)^2. \tag{4.40}$$

Der Relativanteil des Drehimpulses, nota bene zeitlich konstant, wird so $\mathbf{L}_R = (0,0,l)$ mit

$$\begin{aligned} l &= \mu(r_1(t)\dot{r}_2(t) - r_2(t)\dot{r}_1(t)) \\ &= \mu r\cos\phi(t)(\dot{r}(t)\sin\phi(t) + r(t)\dot{\phi}(t)\cos\phi(t)) \\ &= \mu r(t)^2\dot{\phi}(t), \end{aligned} \tag{4.41}$$

wobei sich die Zeitabhängigkeiten gerade aufheben. Dies meint also, dass

$$\dot{\phi}(t) = \frac{l}{\mu r(t)^2}. \tag{4.42}$$

So ist

$$\frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}(t)^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{r}(t)^2 + \frac{l}{2\mu r(t)^2}. \tag{4.43}$$

Der Drehimpuls ist nicht die einzige erhaltene Größe, die Energie

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}(t)^2 + U(r(t)) \tag{4.44}$$

ist es auch. Wir erhalten so

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}(t)^2 + \frac{l}{2\mu r(t)^2} + U(r(t)) \tag{4.45}$$
$$= \frac{1}{2}\mu\dot{r}(t)^2 + U_{\text{eff}}(r(t)), \tag{4.46}$$

mit

$$U_{\text{eff}}(r(t)) = \frac{l}{2\mu r(t)^2} + U(r(t)), \tag{4.47}$$

einem *effektiven Potential* $U_{\text{eff}} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$.

4.3.5 Reduktion auf ein eindimensionales Problem

Dies ist sehr spannend: Die Energie nimmt also die gleiche Form an die die Gesamtenergie eines einzelnen Teilchens mit reduzierter Masse $\mu > 0$ im effektiven Potential $U_{\text{eff}} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$. Das Problem, den Relativanteil des Zweikörperproblem haben wir also komplett zurückgeführt auf ein eindimensionales Problem. Der zusätzliche Term

$l/(2\mu r(t)^2)$ heißt *Zentrifugalterm*. Besser noch: Wir haben im ersten Kapitel gesehen, dass wir solche eindimensionalen Probleme lösen können. Wir können nämlich umformen und integrieren und erhalten

$$\dot{r}(t) = \pm \int_{r(0)}^{r} du \left(\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(u)) \right)^{1/2} = \int_0^t ds = t. \tag{4.48}$$

Dies läßt sich lösen, um so ein Funktion $t \mapsto r(t)$ zu erhalten, die von den erhaltenen Größen der Energie E und der Komponente des Drehimpulses l, sowie natürlich der Anfangsbedingung $r(0)$ (und der Zeit $t \geq 0$). Wir können auch die Kurve $t \mapsto \phi(t)$ als Winkelbahnkurve bestimmen. Ausgangspunkt ist Gleichung (4.42), das wir durch Integration lösen können als

$$\phi(t) - \phi(0) = \int_0^t ds \frac{l}{\mu r^2(s)}. \tag{4.49}$$

Dies hängt von $t \geq 0$ ab wie wiederum der Energie E und der Komponente des Drehimpulses l. Übrigens kann sich der Umlaufsinn nicht ändern, weil $\dot{\phi}(t)$ immer das gleiche Vorzeichen hat. Aus dieser Bewegung in Polarkoordinaten kann man die Bahnkurve $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ bestimmen: Wir haben einen Weg gefunden, das Problem zu lösen. Es ist interessant zu sehen, welche Größen in unserem Lösungsweg als Anfangsbedingungen vorgegeben sind: Dies sind $r(0)$ und $\phi(0)$, der Anfangsradius und -winkel, sowie die erhaltenen Größen l und E. Die Ableitungen zur Zeit $t = 0$, also $\dot{r}(0)$ und $\dot{\phi}(0)$ sind so nicht mehr vorzugeben, sie ergeben sich vielmehr durch

$$l = \mu r(0)^2 \dot{\phi}(0) \tag{4.50}$$

und

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}(0)^2 + U_{\text{eff}}(r(0)). \tag{4.51}$$

4.3.6 Bahnen von Zweikörperproblemen

Spannend ist auch zu sehen, wie die *Bahn* aussieht und nicht die Bahnkurve: Also die Linie, die die Teilchen durchlaufen, abstrahiert von der Zeit, zu der dies passiert. Wenn man an der Bahn interessiert ist, will man also nur die funktionale Abhängigkeit $\phi \mapsto r(\phi)$ kennen. Denn wenn man $t \mapsto \phi(t)$ als zeitliche Funktion kennt und diese radiale Abhängigkeit, ist aus

$$t \mapsto r(\phi(t)) \tag{4.52}$$

auch die gesamte Bahnkurve zu bestimmen. In der Tat ist ja

$$\dot{r}(t) = \frac{dr(\phi)}{d\phi}\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dr(\phi)}{d\phi}\dot{\phi}(t), \tag{4.53}$$

was heißt, dass

$$\frac{dr(\phi)}{d\phi} = \pm \frac{l}{\mu} \left(\frac{2}{\mu} \frac{E - U_{\text{eff}}(r)}{r^2} \right)^{1/2} = \pm \frac{\sqrt{2\mu}}{l} r^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}. \tag{4.54}$$

So kann man wieder integrieren zu

$$\phi(r) - \phi(0) = \pm \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r(0)}^{r} du \frac{1}{u^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(u)}}, \tag{4.55}$$

$\phi(0)$ und $r(0)$ vorgebend.

4.3.7 Diskussion von Bahnen von Zweikörperproblemen

Wir wollen uns typische Bahnen und Bahnkurven im Zweikörperproblem nun etwas genauer ansehen und zeitliche Verläufe diskutieren. Typisch für Potentiale $r \mapsto U(r)$ ist, die für $r \to \infty$ divergiert. Gleichermaßen ist sie für $r \to 0$ nicht zu stark singulär, dass der Zentrifugalterm noch dominiert. Natürlich erfüllt das Potential des Gravitationsgesetzes diese Bedingungen, das unser paradigmatisches Beispiel sein soll. U_{eff} divergiert so also für kleine und große Werte von r und hat dazwischen mindestens ein Minimum: Für das Gravitationspotential sieht das effektive Potential aus wie ein Sessel.

Die erste Beobachtung ist, dass der maximale Wert von U_{eff} bereits durch die Anfangsenergie vorgegeben ist. Da ja Gleichung (4.51) gilt, muss für alle Bahnen

$$U_{\text{eff}}(r) \leq E \tag{4.56}$$

gelten für alle r. Die verbleibende Energie $T = E - U_{\text{eff}}$ ist also die kinetische Energie. Tatsächlich ist r beschränkt durch

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max}. \tag{4.57}$$

Da $\dot{\phi}(t)$ immer das gleiche Vorzeichen hat, wächst $\phi(t)$ also monoton mit $t \geq 0$, während r zwischen dem minimalen Wert $r_{\min}$ und dem maximalen Wert $r_{\max}$ oszilliert. Der Punkt $r_{\min}$ wird *Perizentrum* genannt, der Punkt $r_{\max}$ *Apozentrum*. Die Bahn muss nicht geschlossen sein, übrigens: Man kann sich komplexe Dynamiken vorstellen, die letztlich die gesamte Fläche, die von den beiden Kreisen, die $r_{\min}$ und $r_{\max}$ entsprechen, einnimmt.

Interessant ist auch der Fall, in dem

$$r_{\max} = r_{\max} \tag{4.58}$$

ist, bei dem $r(t)$ also zeitlich konstant ist. Dann ist die Bahn offensichtlich eine *Kreisbahn*. Tatsächlich verläuft das Teilchen auf der Kreisbahn dann gleichförmig, weil dann

$$\phi(t) = \frac{l}{\mu r(0)^2} t + \phi(0), \tag{4.59}$$

der Winkel wächst also linear in der Zeit an.

Der Fall ohne Drehimpuls mit $l = 0$ ist insofern bemerkenswert, da dann der Wert $r(t) = 0$ möglich wird. Interessant ist auch der Fall, in dem $U(r)$ für große r gegen eine Konstante konvergiert, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit (wir können ja so unseren Energienullpunkt legen)

$$\lim_{r \to \infty} U(r) = 0. \tag{4.60}$$

Dann gibt es immer noch ein $r_{\min} > 0$, wenn $l > 0$ ist. Für $E < 0$ gilt auch alles bisher Gesagte. Allerdings kann für $E >$ der Wert von $r(t)$ über alle Grenzen wachsen.

4.3.8 Keplerproblem

Mit all dieser Vorbereitung können wir uns nun die verbleibenden Keplerschen Gesetze herleiten und uns grundsätzlich dem Keplerproblem widmen. Dieser Fall ist nur insofern speziell, dass wir konkret das Potential $U : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ wählen mit

$$U(r) = -\frac{\xi}{r}, \tag{4.61}$$

wobei $\xi := \gamma m_1 m_2$. Tatsächlich wurde dieses Problem historisch erstmals von Newton gelöst und in der Principia vorgestellt. Wir können in der Diskussion von Bahnen von Gleichung (4.55) ausgehen. Mit der Substitution $u = 1/v$ und so $-du/u^2 = dv$ ist

$$\phi(r) - \phi(0) = -\int_{1/r(0)}^{1/r} ds \left(\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu\xi v}{l^2} - u^2 \right)^{-1/2}. \tag{4.62}$$

Dies ergibt

$$\phi(r) - \phi(0) = \arccos \left(\frac{\frac{l^2}{\mu\xi}\frac{1}{r} - 1}{\left(1 + \frac{2l^2 E}{\mu\xi^2}\right)^{1/2}} \right) \tag{4.63}$$

nach Standardrechenregeln für Integrale, auch wenn das ziemlich schrecklich aussieht. So findet man

$$\min_{r \geq 0} U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\mu\xi^2}{2l^2}. \tag{4.64}$$

Um diesen etwas sperrigen Ausdruck zu vereinfachen, schreiben wir

$$q := \frac{l^2}{\mu\xi} \tag{4.65}$$

und

$$\epsilon := \left(1 + \frac{2l^2 E}{\mu\xi^2}\right)^{1/2}. \tag{4.66}$$

So wird Gleichung (4.63) zu dem etwas handhabbarerem Ausdruck

$$\phi(r) - \phi(0) = \arccos \left(\frac{q/r - 1}{\epsilon} \right), \tag{4.67}$$

was nichts anderes ist als

$$\epsilon \cos(\phi(r) - \phi(0)) = \frac{q}{r} - 1 \tag{4.68}$$

oder auch

$$r = \frac{q}{1 + \epsilon \cos(\phi(r))}, \tag{4.69}$$

wenn wir $\phi(0) = 0$ wählen, was die Allgemeinheit nicht beschränkt. So sieht das schon viel besser aus. Dies ist eine Polargleichung für einen sogenannten *Kegelschnitt* mit einem Brennpunkt im Zentrum. Konkreter ist dies für

- $\varepsilon < 1$ also $E < 0$ eine *Ellipse*,
- $\varepsilon = 1$ also $E = 0$ eine *Parabel*,
- $\varepsilon > 1$ also $E > 0$ eine *Hyperbel*.

Dies sind tatsächlich die möglichen Bewegungen etwa von Himmelskörpern wie Planeten oder Asteroiden im System mit der Sonne.

4.3.9 Erstes Keplersches Gesetz

Für $\varepsilon < 1$ also $E < 0$ ergeben sich gebundene Bahnen – tatsächlich hier sogar eine geschlossene Bahnkurve, was dem besonderen Potential geschuldet ist[1]. Hier oszilliert r zwischen

$$r_{\min} = \frac{q}{1+\epsilon} \tag{4.70}$$

beim Winkel $\phi = 0$ und

$$r_{\max} = \frac{q}{1-\epsilon} \tag{4.71}$$

beim Winkel $\phi = \pi$ hin und her. Es ergibt sich eine Ellipse als Bahn. Im Spezialfall, dass $\epsilon = 0$ ist, ist diese Bahn ein Kreis. Diese Konstante ϵ nimmt tatsächlich die Rolle der *Exzentrität* der Ellipse ein. Im allgemeinen lautet die große Halbachse a der Ellipse

$$2a := r_{\min} + r_{\max} = \frac{q}{1+\epsilon} + \frac{q}{1-\epsilon} = \frac{2q}{1-\epsilon^2}. \tag{4.72}$$

Die kleine Halbachse b findet man, indem man verwendet, dass für Ellipsen

$$\epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \tag{4.73}$$

gilt, und so ist

$$b^2 = qa. \tag{4.74}$$

Wir haben also das erste Keplersche Gesetz hergeleitet, in den Fußspuren Newtons.

> **Erstes Keplersches Gesetz:** Planeten beschreiben Ellipsenbahnen um die Sonne, die stets in einem Brennpunkt der Ellipsenbahnen steht.

Diese Halbachsen können wir zudem konkret angeben, über das eigentliche Gesetz hinaus. Dass Kepler auffiel, dass es sich hier um Ellipsen handelt, ist insofern bemerkenswert, dass die Exzentrizität der Planetenbahnen recht klein ist. So ist die Exzentrizität der Bahn der *Erde* $\epsilon = 0.017$, also die Bahn fast exakt ein Kreis, für den erdnächsten Planeten, den *Mars*, $\epsilon = 0.093$, der nach dem Merkur den größten Wert unter den Planeten annimmt (abgesehen vom *Pluto*, dem der Planetenstatus allerdings

[1] In der Tat legt dies nahe, dass für das Gravitationspotential noch über Energie und Drehimpuls eine weitere Größe erhalten ist. Dies ist in der Tat der Fall: Der *Lenz-Runge-Vektor* ist zusätzlich erhalten, ein Vektor, der vom Kraftzentrum zum Perizentrum zeigt. Wir werden uns die Beschreibung dessen aber vorläufig verkneifen.

aberkannt wurde). Nur einige kleinere Zwergplaneten, die Kepler unbekannt sein mussten, da sie schlecht beobachtbar sind, haben eine größere Exzentrizität. Etwa gibt die 'Liste der Zwergplaneten des Sonnensystems' auf Wikipedia für *Eris* doch immerhin den Wert $\epsilon = 0.4421$ an. Noch kleinere Himmelskörper nehmen noch größere Werte an.

4.3.10 Drittes Keplersches Gesetz

Das vielleicht bemerkenswerteste Keplersche Gesetz ist das dritte.

Drittes Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten von Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Ellipsenbahnen.

Es scheint aus heutiger Sicht bemerkenswert, wie ein derartig detailliertes Gesetz mit damaliger Technologie gefunden werden konnte. Um es zu zeigen, gehen wir auf die Überlegungen zum zweiten Keplerschen Gesetz und insbesondere auf Gleichung (4.35) zurück. Wir wissen ja nun, dass in einer zeitlichen Periode $T > 0$ die gesamte Fläche von

$$A = \pi ab \tag{4.75}$$

überstrichen wird: Dies ist nichts anderes als die Fläche einer Ellipse mit großer und kleiner Halbachse b und a. Also ist

$$\pi ab = \frac{lT}{2\mu}. \tag{4.76}$$

Dies meint

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2\mu^2a^2b^2}{l^2} = \frac{4\pi^2\mu^2}{l^2}a^2(qa) & (4.77)\\ &= \frac{4\pi^2\mu}{\xi}a^3. & (4.78)\end{aligned}$$

Wenn wir dies wieder in den alten und wohl vertrauteren Größen ausdrücken, finden wir

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1+m_2)}a^3. \tag{4.79}$$

In guter Näherung kann hier für die bekannten Systeme von Sonne und Planeten $m_1 + m_2$ durch die Sonnenmasse m_1 ersetzt werden. Für die recht kürzlich gefundenen Exoplaneten muss das allerdings nicht so sein. Das dritte Keplersche Gesetz ist also für Zweikörperprobleme exakt richtig und wird erst verändert durch die Präsenz anderer störender Himmelskörper und relativistischer Korrekturen jenseits der analytischen Mechanik.

4.3.11 Hyperbolische Bahnen

Parabolische Bahnen stellen einen Grenzfall dar und sind vielleicht nicht so interessant. Hyperbolische Bahnen dagegen schon. Dies ist der Fall mit $\epsilon > 1$ und also $E > 0$. Dieser Fall ist tatsächlich ebenso allgemein zu lösen, für allgemeine Potentiale, die auch insbesondere anziehend oder abstoßend sein können. Wir wollen hier nur den Fall betrachten, bei dem $\xi > 0$ ist und das Gravitationsgesetz ins Zentrum rücken. Es ist ja

$$r(\phi) = \frac{q}{1 + \epsilon \cos(\phi)}, \tag{4.80}$$

und für eine anziehende Kraft ist $q > 0$. Dann ist das Perizentrum

$$r_{\min} = \frac{q}{1 + \epsilon} \tag{4.81}$$

für den Winkel $\phi = 0$. Die Asymptotenwinkel ω sind gegeben durch die Lösungen von

$$1 + \epsilon \cos(\omega) = 0. \tag{4.82}$$

Solche Hyperbelbahnen sind für interstellare Objekte tatsächlich realisiert. So ist etwa *Oumuamua*, das Objekt, das mit Hilfe des Hubble-Teleskops 2017 entdeckt wurde und viel Aufmerksamkeit auf sich zog, auf einer Hyperbelbahn. Das Objekt kam von auerhalb unseres Sonnensystems, machte eine Kurve um die Sonne und verlsst seither das Sonnensystem wieder Richtung Unendlichkeit, denn Hyperbelbahnen sind ja keine geschlossenen Kurven.

4.4 Virialsatz

Schließlich wollen wir die Newtonsche Mechanik abschließen, indem wir noch den Virialsatz nachschieben. Eigentlich ist er hier etwas deplatziert, da es nicht wirklich um Drehimpulse geht. Allerdings ist er einer der wenigen allgemeinen Sätze, den die Newtonsche Mechanik bieten kann für Vielteilchensysteme.

4.4.1 Zeitliche Mittelwerte und der allgemeine Virialsatz

Der Virialsatz macht Aussagen über zeitliche Mittelwerte von beschränkten Funktionen. Der *zeitliche Mittelwert* ist

$$\bar{f} := \lim_{t_c \to \infty} \frac{1}{2t_c} \int_{-t_c}^{t_c} dt f(t) dt. \tag{4.83}$$

Wir werden solche Zeitmittel später auch in der statistischen Physik kennenlernen. Wir wollen nun die mittlere kinetische Energie betrachten. Wir erhalten für ein System aus

n Teilchen in einem Potentialfeld U

$$2T = \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{\mathbf{p}}_j(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j(t) \tag{4.84}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j(t) \cdot \mathbf{r}_j(t) - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}_j(t)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j(t) \cdot \mathbf{r}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j(t) \cdot \nabla_j U. \tag{4.85}$$

So können wir leicht das Zeitmittel bilden und finden

$$2\bar{T} = \lim_{t_c \to \infty} \frac{1}{2t_c} \int_{-t_c}^{t_c} dt \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j(t) \cdot \mathbf{r}_j(t) + \overline{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j(.) \cdot \nabla_j U} \tag{4.86}$$

$$= \lim_{t_c \to \infty} \frac{1}{2t_c} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j(t) \cdot \mathbf{r}_j(t) \Big|_{-t_c}^{t_c} + \overline{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j(.) \cdot \nabla_j U}.$$

So erhalten wir die folgende Einsicht.

Virialsatz: Ist $t \mapsto \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j(t) \cdot \mathbf{r}_j(t)$ in der Zeit beschränkt, so ist

$$2\bar{T} = \overline{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j(.) \cdot \nabla_j U}. \tag{4.87}$$

4.4.2 Beispiele für den Virialsatz

Zunächst einmal mag nicht offensichtlich scheinen, warum dies eine interessante Aussage ist. Tatsächlich ist diese Einsicht besonders dann interessant, wenn das Potential U noch eine weitere Eigenschaft hat, nämlich eine *homogene Funktion vom Grade* k zu sein, was heißt, dass

$$U(x\mathbf{r}_1, \ldots, x\mathbf{r}_n) = x^k U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \tag{4.88}$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle Ortskoordinaten. Ableitung nach x ergibt so

$$\frac{d}{dx} U(x\mathbf{r}_1, \ldots, x\mathbf{r}_n) = \frac{d}{dx} x^k U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \tag{4.89}$$

$$= k x^{k-1} U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n).$$

Die linke Seite ergibt aber

$$\frac{d}{dx} U(x\mathbf{r}_1, \ldots, x\mathbf{r}_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x \mathbf{r}_j} \cdot \frac{\partial x \mathbf{r}_j}{dx}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x \mathbf{r}_j} \cdot \mathbf{r}_j. \tag{4.90}$$

Wenn wir nun $x = 1$ setzen, erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \cdot \nabla_j U = kU. \tag{4.91}$$

Dies ist tatsächlich eine spannende Einsicht. So gilt in der Tat gilt für jedes homogene Potential vom Grade k also

$$2\bar{T} = k\bar{U}. \tag{4.92}$$

Dies sagt also darüber etwas aus, wie die Energie in kinetische und potentielle Energie aufgeteilt ist, jedenfalls im zeitlichen Mittel. Da die Gesamtenergie E in konservativen Potentialen ja erhalten ist, gilt

$$E = \bar{T} + \bar{U} = \left(\frac{k}{2} + 1\right)\bar{U}. \tag{4.93}$$

Somit ist für $k \neq -2$

$$\bar{U} = \frac{2}{2+k}E, \tag{4.94}$$

$$\bar{T} = \frac{k}{2+k}E. \tag{4.95}$$

In dieser Weise sind die kinetische und potentielle Energie aufgeteilt. Etwa gilt für das Gravitationspotential bekanntermaßen

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\xi}{|\mathbf{r}|}. \tag{4.96}$$

In diesem Falle ist also $k = -1$,

$$\nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{\xi}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \tag{4.97}$$

und somit

$$\mathbf{r} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{\xi}{|\mathbf{r}|} = -U. \tag{4.98}$$

Für das Federgesetz ist

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}D\mathbf{r}^2 \tag{4.99}$$

und so $k = 2$, und

$$\mathbf{r} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) = D\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 2U. \tag{4.100}$$

Letzteres meint, dass im Mittel die kinetische und potentielle Energie immer gleich sind – außer, dass sie in der Zeit alternierende Rollen einnehmen.