Analytische Mechanik (20113401)
Vorlesender: Jens Eisert.
Kapitel 5: Lagrangesche Mechanik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 5

Lagrangesche Mechanik

5.1 Vorbemerkungen

5.1.1 Einleitung

Bisher haben wir die Newtonsche Mechanik in einer etwas mathematisierteren und gründlicheren Art untersucht als dies wohl bisher der Fall war. Allerdings sollte der konzeptuelle Rahmen recht gewohnt sein. In diesem Kapitel wollen wir erstmals richtig echtes Neuland betreten, indem wir uns die Lagrangesche Mechanik vorknöpfen.

Dieser Schritt ist einerseits ganz pragmatisch motiviert. In der Tat konnten wir bisher Bewegungsgleichungen aufstellen und zum Teil auch lösen, wie etwa Bewegungsgleichungen in einer Dimension oder die des harmonischen Oszillators. Das bisherige Vorgehen ergibt allerdings nur dann Sinn, wenn alle Kräfte des Problems bekannt sind. Wenn wir etwa an Planetenbewegungen denken, ist diese Annahme auch in der Tat plausibel und führt zu einer sehr guten Beschreibung des Problems, wie wir bei der Behandlung des Keplerproblems im letzten Kapitel sahen. Allerdings gibt es eine Vielzahl von anderen Kontexten, wo diese Kräfte nicht genau bekannt sind oder sie nicht einmal wirklich interessieren – allerdings ist deren Wirkung wohlbekannt. Wenn sich etwa Körper auf Flächen bewegen, tritt eine solche Situation auf. Diese Situation läßt sich mit der Lagrangesche Mechanik gut beschreiben.

Andererseits ist das Vorgehen konzeptuell motiviert und wird uns ein neues Bild der Mechanik erlauben. Die Quantenfeldtheorie baut auch auf Lagrangeschen Methoden auf, also ist das Vorgehen in diesem Kapitel wegweisend. Auf sie baut auch die Hamiltonsche Mechanik auf, die wir im folgenden Kapitel kennenlernen, die die elementare Quantenmechanik bestimmt.

5.1.2 Das Beispiel des geometrischen Pendels

Wir haben bereits die harmonische Bewegung eines Pendels oder einer Federauslenkung mit kleinen Auslenkungen angesehen, haben da aber einen subtilen und interessanten Punkt unter den Tisch gekehrt. In der Tat kann man die Auslenkung einer Feder als praktisch eindimensionales Problem auffassen. Beim Pendel ist dies zwar zu einer guten Näherung auch möglich. Wenn wir weiter gehen wollen in unserer Beschreibung, stehen wir allerdings vor dem Problem, dass wir die wirkenden Kräfte nicht kennen.

Wenn wir konkret ein Pendel ansehen, das im Ursprung an einem Faden der Länge $l > 0$ aufgehängt ist, dessen Bahnkurve $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ ist, wirken offensichtlich zwei Kräfte: Dies ist einerseits die bekannte Gravitationskraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, die in 3-Richtung senkrecht nach unten zeigt. Aber es wirkt noch eine weitere Kraft, die den Massenpunkt dazu zwingt, aber der Kugelschale zu bleiben. Wir wissen, dass für das Pendel

$$|\mathbf{r}(t)|^2 - l^2 = 0 \tag{5.1}$$

gilt. Nach allem, was wir wissen, muss hierfür eine Kraft verantwortlich sein. Wir wollen sie *Zwangskraft* $\mathbf{Z}(t)$ nennen. Wir kennen also die Kraft nicht, wohl aber dessen Wirkung. Wir können die Bewegungsgleichung formal aufstellen,

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) + \mathbf{Z}(t), \tag{5.2}$$

kennen hier aber $\mathbf{Z}(t)$ nicht, sondern die resultierende *Zwangsbedingung*, die durch Gleichung (5.1) festgelegt ist. Die Kraft bewirkt also, dass die Bewegung in einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, einer zweidimensionalen Fläche, verläuft, auf der die Zwangskraft immer senkrecht steht (allerdings mit einer noch unbekannten Stärke).

Dieses Wissen können wir in der Lösung ausnutzen. Es muss ja so

$$\mathbf{Z}(t) = x(t)\mathbf{r}(t) \tag{5.3}$$

gelten mit einer unbekannten Abhängigkeit $t \mapsto x(t)$. Die resultierenden Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) + x(t)\mathbf{r}(t) \tag{5.4}$$

sind zusammen mit $|\mathbf{r}(t)|^2 - l^2 = 0$ aber ein System von Differentialgleichungen für $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ und $t \mapsto x(t)$. Diese Differentialgleichungen können wir lösen. Dies ist eine Strategie, die wir allgemeiner verfolgen werden. Man nennt diesen dann allgemein formulierten Ansatz auch Langangesche Methode erster Art.

Wir können das Problem aber auch geometrischer motiviert angehen. Wir können ja die Bewegungsgleichung auf die Fläche projizieren, indem wir Vektoren finden, die zu allen Zeiten tangential zur Fläche liegen, die $\mathbf{r}(t)$ begleiten. Wenn wir dann die Bewegungsgleichungen mit solchen Vektoren über ein Skalarprodukt multiplizieren, wird die unbekannte Kraft $\mathbf{Z}(t)$ verschwinden: Skalarprodukte von senkrechten Vektoren nehmen immer den Wert Null an. So wissen wir tatsächlich zunächst nichts über den Betrag von $\mathbf{Z}(t)$, aber diesen können wir a-posteriori bestimmen. Solche Vektoren lassen sich leicht finden, indem wir Koordinaten wählen, die die Bewegung auf der Fläche direkt parametrisieren. Dies sind natürlich in diesem Falle Polarkoordinaten. Wir schreiben

$$\mathbf{r}(t) = r(t)(\sin\theta(t)\cos\phi(t), \sin\theta(t)\sin\phi(t), -\cos\theta(t)), \tag{5.5}$$

wobei die Zwangsbedingungen gerade $r(t) = l$ für alle $t \geq 0$ implizieren. Die verbleibenden Koordinaten sind also $\theta(t), \phi(t) \in \mathbb{R}$. Wir können also $\mathbf{r}(t)$ auffassen als Funktion von $\theta(t)$ und $\phi(t)$, also etwas pedantisch gesprochen eine Funktion $\mathbf{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definieren mit

$$\mathbf{R}(\theta, \phi) = l(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, -\cos\theta), \tag{5.6}$$

so dass natürlich $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{R}(\theta(t), \phi(t))$ für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt. Die Zwangsbedingung

$$\mathbf{R}(\theta, \phi)^2 + l^2 = 0 \tag{5.7}$$

führt durch Ableitung zu

$$\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} = 0, \;\; \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = 0. \tag{5.8}$$

Letztere Gleichungen meinen gerade, dass die Bewegung auf die Fläche eingeschränkt ist. Wenn wir die Bewegungsgleichungen (5.4) mit diesen partiellen Ableitungen im Skalarprodukt multiplizieren, erhalten wir

$$m\ddot{\mathbf{R}}(\theta(t), \phi(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta}(\theta(t), \phi(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(\theta(t), \phi(t))) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta}(\theta(t), \phi(t)), \tag{5.9}$$

sowie

$$m\ddot{\mathbf{R}}(\theta(t), \phi(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi}(\theta(t), \phi(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(\theta(t), \phi(t))) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi}(\theta(t), \phi(t)). \tag{5.10}$$

Diese beiden Gleichungen enthalten $t \mapsto x(t)$ nicht mehr, das wir eliminiert haben. A posteriori, im Nachgang gewissermaßen, kann man diese Zwangskraft allerdings doch finden, da ja

$$\mathbf{Z}(t) = m\ddot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \tag{5.11}$$

gilt. Auch diese Strategie werden wir allgemein verfolgen: Sie wird Lagrangesche Methode zweiter Art genannt.

5.2 Mathematisches Intermezzo

5.2.1 Freiheitsgrade

Es lohnt, hier ein wenig innezuhalten und sich die Geometrie der Bewegung zu verinnerlichen. Ein System von n Punktteilchen hat die Ortskoordinaten $\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_n$, die wir oben im Vektor

$$\bar{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3n} \tag{5.12}$$

zusammengefasst haben. Zusätzlich mögen J Zwangsbedingungen vorliegen, in der Form

$$S_j(\bar{r}, t) = 0, \;\; j = 1, \ldots, J. \tag{5.13}$$

Für jedes j steht so

$$A_j(t) = \left\{ \bar{r} : \bar{r} \in \mathbb{R}^{3n}, S_j(\bar{r}, t) = 0 \right\} \tag{5.14}$$

eine Hyperfläche von $3n - 1$ Dimensionen im $\mathbb{R}^{3n}$ dar. Die Dynamik der Punktteilchen wird im Schnitt dieser Flächen

$$A(t) := \bigcap_{j=1}^{J} A_j(t) \tag{5.15}$$

verlaufen, da ja alle der Zwangsbedingungen erfüllt sein müssen. Dies ist die Menge aller möglichen Ortskoordinaten der Massenpunkte zur Zeit $t \geq 0$. Diese Menge hat die Dimension

$$f = 3n - J. \tag{5.16}$$

Diese Dimension nennt man auch die Zahl der *Freiheitsgrade* des Systems. Im Beispiel des Pendels war $J = 1$, weil es eine Zwangsbedingung gab, $n = 1$, weil es sich um ein Teilchen handelte und also $f = 2$, die Zahl der verbleibenden Freiheitsgrade. Zwangsbedingungen der Form

$$S_j(\bar{r}, t) = 0, \;\; j = 1, \ldots, J, \tag{5.17}$$

nennt man auch *holonome Zwangsbedingungen*. Wenn $t \mapsto A(t)$ zeitlich konstant ist, heißen die Zwangsbedingungen auch *holonom-skleronom*.

5.2.2 Mannigfaltigkeiten

In der Tat finden wir hier die Struktur einer Mannigfaltigkeit, und wir werden dies als Entschuldigung nehmen, um kurz über diese Struktur zu sehen. Eine Mannigfaltigkeit ist anschaulich gesprochen ein topologischer Raum, der lokal so aussieht wie der $\mathbb{R}^d$ für ein d. Hier wollen wir nicht zu pedantisch sein, ein topologischer Raum ist lediglich einer, in dem wir von offenen Mengen sprechen können[1]. Eine *Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum M mit abzählbarer Basis, für welchen es ein $d \in \mathbb{N}$ so gibt, so dass fürr jedes $m \in M$ eine offene Umgebung U von m und ein Homöomorphismus

$$\phi : U \to U_\phi \tag{5.18}$$

von U auf eine offene Teilmenge U_ϕ des $\mathbb{R}^d$ existiert. Letzteres meint gerade, dass die Mannigfaltigkeit lokal wie der $\mathbb{R}^d$ aussieht. Die Zahl d heißt dabei die *Dimension* der Mannigfaltigkeit, der Homöomorphismus ϕ ist eine *Karte*, und das System aller Karten der *Atlas* von M. Sind $\phi : U \to U_\phi$ und $\psi : V \to V_\psi$ zwei Karten von M mit $U \cap V \neq \emptyset$, so nennt man die Abbildung

$$\psi \circ \phi^{-1} : U_\phi \to V_\psi \tag{5.19}$$

einen *Kartenwechsel*. Ein Kartenwechsel ist gewissermaßen eine Umparametrisierung. Der obige Schnitt, der die Freiheitsgrade eines Systems parametrisiert, ist eine Mannigfaltigkeit in diesem Sinne. Unser obiges Beispiel des Pendels zeigt auch, wozu die Komplikation der Karten notwendig ist. Zwar sieht die Dynamik lokal stets aus wie der $\mathbb{R}^2$, was gerade die Zahl der Freiheitsgrade $f = 2$ entspricht. Allerdings liegt die Dynamik auf der zweidimensionalen Sphäre im $\mathbb{R}^3$. Mehrere Karten lassen die Mannigfaltigkeit allerdings dennoch parametrisieren.

[1] Der Vollständigkeit halber doch als Fußnote: Eine *Topologie* ist ein Mengensystem T, bestehend aus Teilmengen einer Grundmenge X, die *offen* genannt werden, und die die folgenden Axiome erfüllen.

- Die leere Menge und die Grundmenge X sind offen.
- Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen. Es genügt hierbei zu fordern, dass der Durchschnitt von zwei offenen Mengen offen ist.
- Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Man nennt dann T eine *Topologie* auf X und das Paar (X, T) einen *topologischen Raum*.

5.3 Lagrangesche Methode erster Art

5.3.1 Virtuelle Verrückungen

Die Lagrangesche Mechanik liefert einen Rahmen, mit solchen Zwangskräften sehr elegant umzugehen. Allerdings handelt es sich hier nicht um ganz neue Physik: Man kann Systeme mit solchen holonomen Zwangsbedingungen auffassen als Punktteilchen, die durch starke elastische Kräfte auf der Mannigfaltigkeit M_t gehalten werden. Die Zwangskräfte sind dann Grenzfälle gewöhnlicher elastischer Kräfte, abgesehen davon, dass man sie freilich a-priori meist nicht genau kennt – das ist ja gerade der Punkt der Lagrangeschen Methoden.

Die Zwangskräfte $\mathbf{Z}_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, kann man auch zu einer $3n$-dimensionalen Zwangskraft $\bar{Z}(t)$ zusammenfassen, die dafür sorgt, dass die Dynamik stets auf $A(t)$ eingeschränkt bleibt. Bei Abwesenheit weiterer äußerer Kräfte ist dann jeder Punkt $\bar{r} \in A(t)$ eine mögliche Gleichgewichtslage. Eine Verschiebung längs $A(t)$ ist dann ohne Widerstand möglich. Dies heißt, geometrisch gesprochen, dass die Zwangskraft $\bar{Z}(t)$ keine Komponente tangential zu $A(t)$ hat und somit senkrecht auf $\bar{Z}(t)$ steht.

Tangentialvektoren auf $A(t)$ heißen *virtuelle Verrückungen*. In der Tat sind solche Tangentialvektoren für allgemeine Mannigfaltigkeiten definiert. Wir wollen hier jedoch konkreter am Problem bleiben. Jeder Tangentialvektor ξ_j an $A_j(t)$ im Punkt $\bar{r}_0$ läßt sich darstellen als

$$\xi_j = \frac{d\bar{r}(\sigma)}{d\sigma}|_{\sigma=0} \tag{5.20}$$

wobei $\sigma \mapsto \bar{r}(\sigma)$ eine parametrisierte Kurve in $A_j(t)$ ist die für $\sigma = 0$ in $\bar{r}_0 \in A_j(t)$ beginnt. Da $S_j(\bar{r}(\sigma), t) = 0$ gilt, ist auch

$$\frac{d}{d\sigma} S_j(\bar{r}(\sigma), t)|_{\sigma=0} = 0, \tag{5.21}$$

und so

$$\frac{d}{d\sigma} S_j(\bar{r}(\sigma), t)|_{\sigma=0} = \frac{d\bar{r}(\sigma)}{d\sigma} \cdot \nabla S_j(\bar{r}(\sigma), t)|_{\sigma=0} = \xi_j \cdot \nabla S_j(\bar{r}_0, t) = 0. \tag{5.22}$$

Damit sind auf $A_j(t)$ senkrechte Vektoren parallel zu $\nabla S_j(\bar{r}_0, t)$. So stehen alle Vektoren $\nabla S_j(\bar{r}, t)$ mit $\bar{r} \in A(t)$ senkrecht auf

$$A(t) = \bigcap_{j=1}^{J} A_j(t). \tag{5.23}$$

Die Zwangskraft $\bar{Z}(t)$, die selbst senkrecht auf $A(t)$ steht, lässt sich so als Linearkombination dieser Vektoren darstellen als

$$\bar{Z}(t) = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j(t) \nabla S_j(\bar{r}, t). \tag{5.24}$$

Für unabhängige Zwangsbedingungen sind die Gradienten $\lambda_j(t)\nabla S_j$ fast überall linear unabhängig und so die Koeffizienten $\lambda_j(t)$ durch $\bar{Z}(t)$ eindeutig bestimmt.

5.3.2 D'Alembertsches Prinzip

Wir wollen nun noch konkreter werden, indem wir die J Variablen $q_1, \ldots, q_f$ einführen für f Freiheitsgrade, die $A(t)$ parametrisieren (wobei also f seine Dimension ist), $f = 3n - J$. Hier haben wir streng genommen die Annahme gemacht, dass wir einen solchen Koordinatensatz finden können und nicht mehrere Karten in einem Atlas einer Mannigfaltigkeit brauchen. Diese Komplikation lässt sich allerdings schnell überwinden, indem man lokal das Problem betrachtet. Wir wollen also im folgenden annehmen, dass wir einen solchen Koordinatensatz finden können. Diese Koordinaten parametrisieren also die Bewegung auf $A(t)$. Die zulässigen Lagen sind also durch

$$\bar{r}(q_1, \ldots, q_f, t), \tag{5.25}$$

wobei die $q_1, \ldots, q_f$ innerhalb bestimmter Grenzen frei veränderlich sind. Natürlich gilt

$$\bar{r}(q_1, \ldots, q_f, t) \in A(t) \tag{5.26}$$

und so sind $\partial\bar{r}/\partial q_j$ virtuelle Verrückungen, also Tangentialvektoren an $A(t)$. Eine allgemeine virtuelle Verrückung (meint also einen Tangentialvektor an $A(t)$) im Punkt $\bar{r}(q_1, \ldots, q_f, t)$ kann man also schreiben als

$$\delta\bar{r} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial\bar{r}}{\partial q_j}\delta q_j = (\delta\mathbf{r}_1, \ldots, \delta\mathbf{r}_n). \tag{5.27}$$

Die Aussage, dass $\bar{Z}(t)$ senkrecht auf $A(t)$ steht, nennt man das *d'Alembertsche Prinzip*.

D'Alembertsches Prinzip: Die Zwangskraft $\bar{Z}(t)$ steht senkrecht auf $A(t)$ und es gilt

$$\bar{Z} \cdot \delta\bar{r} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Z}_j \cdot \delta\mathbf{r}_j = 0. \tag{5.28}$$

Da $\delta\bar{r}$ ein Wegstück entlang $A(t)$ ist, heißt auch, dass die Zwangskräfte keine virtuelle Arbeit leisten, also keine Arbeit entlang einer virtuellen Verrückung. Dies ist insbesondere im skleronomen Fall interessant, wo also A keine Zeitabhängigkeit hat. Dann gehören zu virtuellen Verrückungen physikalisch realisierbare Verschiebungen, so dass die Zwangskräfte keine Arbeit leisten.

5.3.3 Lagrangesche Gleichungen erster Art

Wenn sich die inneren und äusseren Kräfte (abgesehen von den Zwangskräften) aus einem Potential ableiten lassen, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\nabla U(\bar{r}(t), t) + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \nabla S_j(\bar{r}(t), t). \tag{5.29}$$

Ausgeschrieben erhalten wir so die folgenden Gleichungen. .

Lagrangesche Gleichungen erster Art: Die $3n$ Gleichungen

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k(t) = -\nabla_k U(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t), t) + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \nabla_k S_j(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t), t) \quad (5.30)$$

für $k = 1, \ldots, n$ heißen zusammen mit den J Gleichungen

$$S_j(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t), t) = 0, \quad j = 1, \ldots, J, \quad (5.31)$$

die $3n + J$ *Lagrangesche Gleichungen erster Art*.

Die Grundidee des Ansatzes besteht also daran, die Bewegungsgleichungen aufzustellen, mitsamt den noch unbekannten Variationsparametern, um für $3n + J$ Differentialgleichungen $3n + J$ Größen zu bestimmen.

5.3.4 Beispiel von verbundenen Massenpunkten

Zunächst einmal mag nicht ganz offensichtlich scheinen, wie man diese Einsichten praktisch nutzen kann. Wir wollen dies daher an einem Beispiel veranschaulichen. Es wird wieder eine Art Pendel betrachtet, allerdings ein etwas anderes als oben. Wir betrachten zwei Massenpunkte, also $n = 2$. Der erste Massenpunkt mit Masse m_1 kann sich nur entlang der 1-Achse bewegen. Um die Diskussion zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dass die Dynamik stets auf die $1-2$-Ebene stattfindet, und wir so die Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ betrachten wollen. Alternativ könnten wir auch die Zwangsbedingung dazu nehmen, dass die 3-Koordinate auf den Wert Null eingeschränkt ist. Zudem Die Tatsache, dass der erste Massenpunkt sich nur auf der 1-Achse bewegen kann, heisst, dass $\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ – um die Notation hier zu vereinfachen, wollen wir hier $\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ schreiben und nicht $\mathbf{r}_1(t) = ((\mathbf{r}_1(t))_1, (\mathbf{r}_1(t))_2)$, was übersichtlicher scheint – eingeschränkt ist auf

$$\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), 0) \quad (5.32)$$

für alle Zeiten $t \geq 0$. Der zweite Massenpunkt mit Masse m_2 sei mit dem ersten mit einer Stange der Länge l verbunden. Für $\mathbf{r}_1(t)$ und $\mathbf{r}_2(t)$ lauten also die Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), t) &= y_1(t) = 0, && (5.33) \\ S_2(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), t) &= (x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2 - l^2 \\ &= 0. && (5.34) \end{aligned}$$

Die Zwangskräfte nehmen die Form an

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}\right)(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2) \\
&= (2\lambda_2(x_1 - x_2), 2\lambda_2(y_1 - y_2) + \lambda_1), && (5.35) \\
\mathbf{Z}_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2) \\
&= (-2\lambda_2(x_1 - x_2), -2\lambda_2(y_1 - y_2) + \lambda_1). && (5.36)
\end{aligned}$$

Ein Moment des Nachdenkens zeigt, dass wir nun (da wir die Bewegung auf die $1-2$-Ebene eingeschränkt haben), $f = 4 - 2 = 2$ Freiheitsgrade haben. Wir wollen Koordinaten q_1, q_2 auf der passenden Mannigfaltigkeit einführen wie oben beschrieben. Eine sinnvolle Wahl von Koordinaten ist

$$\begin{aligned}
q_1(t) &= x_1(t), && (5.37) \\
q_2(t) &= \phi(t), && (5.38)
\end{aligned}$$

wobei $t \mapsto \phi(t)$ den Winkel des Pendels bezeichnet. Die alten Koordinaten ergeben sich so zu

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= q_1(t), && (5.39) \\
y_1(t) &= 0, && (5.40) \\
x_2(t) &= q_1(t) + l \sin q_2(t) =: x_2(q_1(t), q_2(t)), && (5.41) \\
y_2(t) &= -l \cos q_2(t) =: y_2(q_1(t), q_2(t)). && (5.42)
\end{aligned}$$

Die Zwangskräfte sind also so

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_1(t) &= (-2\lambda_2(t) l \sin q_2(t), \lambda_1(t) + 2\lambda_2(t) l \cos q_2(t)) && (5.43) \\
&= (0, \lambda_1(t)) - 2\lambda_2(t) l (\sin q_2(t), -\cos q_2(t)), \\
\mathbf{Z}_2(t) &= 2\lambda_2(t) l (\sin q_2(t), -\cos q_2(t)). && (5.44)
\end{aligned}$$

Die Zwangskraft $\mathbf{Z}_1(t)$ hat also zwei Beiträge: Einen Beitrag $(0, \lambda_1(1))$ in die 1-Richtung, resultierend aus der Zwangsbedingung, dass $S_1 = 0$ ist. Dieser Anteil sorgt gerade dafür, dass das erste Punktteilchen auf der 1-Achse mit $y_1 = 0$ bleibt. Der zweite Beitrag zu $\mathbf{Z}_1(t)$ ist entgegengesetzt zu $\mathbf{Z}_2(t)$. Dieser Anteil stellt sicher, dass der Abstand der beiden Punktteilchen tatsächlich stets l beträgt. $\mathbf{Z}_2(t)$ nimmt so also die Rolle eines Zuges auf das erste Teilchen ein. In der Tat zeigt $\mathbf{Z}_2(t)$ gerade zum ersten Punktteilchen. Die 1-Komponenten von $\mathbf{Z}_1(t)$ und $\mathbf{Z}_2(t)$ addieren sich zu Null. Wie sehen nun die virtuellen Verrückungen aus? Diese sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_1} &= (1, 0), && (5.45) \\
\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_2} &= (0, 0), && (5.46) \\
\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_1} &= (1, 0), && (5.47) \\
\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_2} &= l(\cos q_2, \sin q_2). && (5.48)
\end{aligned}$$

Das d'Alembertsche Prinzip besagt nun, dass

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_1} + \mathbf{Z}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_1} = 0, \tag{5.49}$$

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_2} + \mathbf{Z}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_2} = 0. \tag{5.50}$$

Beide Gleichungen sind nach Konstruktion gerade erfüllt. Wir finden für die Zwangskräfte

$$\mathbf{Z}_1(t) = (-\lambda_2 \sin q_2, \lambda_1), \tag{5.51}$$

$$\mathbf{Z}_2(t) = \lambda_2(\sin q_2, -\cos q_2). \tag{5.52}$$

Die Lagrangeschen Gleichungen erster Art sind so also

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1(t) = m_1\mathbf{G} + \mathbf{Z}_1(t), \tag{5.53}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2(t) = m_2\mathbf{G} + \mathbf{Z}_2(t), \tag{5.54}$$

mit den Zwangsbedingungen

$$y_1 = 0, \tag{5.55}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0. \tag{5.56}$$

Hier ist wie in Kapitel 2 $\mathbf{G}$ die Gravitationskraft, die hier im $\mathbb{R}^2$ die Form

$$\mathbf{G} = (0, -G) \tag{5.57}$$

annimmt. Diese vier Differentialgleichungen für vier Größen können direkt gelöst werden. Dies ist die Lagrangesche Methode erster Art: Man löst gewissermaßen das Problem mit etwas Gewalt, indem man die Bewegungsgleichungen mitsamt der Zwangsbedingungen löst. Mehr wehende Fahnen hat diese Methode nicht: Man nutzt die Geometrie des Problems aus uns löst so gewissermaßen die Bewegungsgleichungen mit den Zwangsbedingungen zusammen.

Wir können die Gleichungen allerdings auch mit $\partial\mathbf{r}_1/\partial q_i$ und $\partial\mathbf{r}_2/\partial q_i$ für $i = 1, 2$ skalar multiplizieren und durch Addition umformen, so dass die Zwangskräfte aufgrund des d'Alembertschen Prinzips herausfallen. Dieses Vorgehen antizipiert die Lagrangesche Methode zweiter Art – aber nun wollen wir schon eine explizite Lösung des Problems sehen. So findet man

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0, \tag{5.58}$$

$$m_2\ddot{x}_2 \cos q_1 + (m_2\ddot{y}_2 + m_2 G)\sin q_2 = 0. \tag{5.59}$$

Fassen wir die alten Koordinaten als Funktion der neuen (q_1, q_2) auf, wobei $x_1 = q_1$ ist, erhält man zwei Gleichungen für $t \mapsto q_1(t)$ und $t \mapsto q_2(t)$, nämlich

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2 l\ddot{q}_2 \cos q_2 - m_2 l\dot{q}_2^2 \sin q_2 = 0, \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned} &m_2 \cos q_2(\ddot{q}_1 + l\ddot{q}_2\cos q_2 - l\dot{q}_2^2 \sin q_2) \\ &+ \sin q_2(m_2 l\ddot{q}_2 \sin q_2 + m_2 l\dot{q}_2^2 \cos q_2 + m_2 G) = 0. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Dies lässt sich umformen zu

$$(m_1+m_2)\ddot{q}_1 = m_2 l(\dot{q}_2^2 \sin q_2 - \ddot{q}_2 \cos q_2), \tag{5.62}$$
$$\ddot{q}_1 \cos q_2 + l\ddot{q}_2 + G\sin q_2 = 0. \tag{5.63}$$

Diese Gleichungen können durch einfache Integration gelöst werden. In der Tat kommen wir auch so zu geschlossenen Gleichungen, die allerdings ziemlich kompliziert aussehen. Um das Verhalten des Pendels etwas plakativ besser studieren zu können, nachdem wir so weit gekommen sind, wollen wir sehen, wie sich das Pendel bewegt für kleine Auslenkungen von q_1 und q_2. In niedrigster Ordnung in einer Taylorreihe von $\sin(x) = x + \Theta(x^2)$ und $\cos(x) = 1 - \Theta(x)^2$ ergeben sich die Gleichungen

$$(m_1+m_2)\ddot{q}_1 = -m_2 l\dot{q}_2^2, \tag{5.64}$$
$$\ddot{q}_1 + l\ddot{q}_2 + Gq_2 = 0. \tag{5.65}$$

So finden wir

$$\ddot{q}_2\left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right) + \frac{G}{l}q_2 = 0 \tag{5.66}$$

also

$$\ddot{q}_2 - \frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{G}{l}q_2 = 0. \tag{5.67}$$

Wenn wir uns also fragen, wie sich das Pendel bewegt, finden wir in dieser Approximation

$$q_2(t) = q_2(0)\cos\omega t \tag{5.68}$$

mit

$$\omega^2 := \frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{G}{l}. \tag{5.69}$$

Die Frequenz des zweiten Massenpunktes ist also verändert gegenüber der Frequenz eines fest aufgehängten Pendels, wo wir $\omega^2 = G/l$ erwarten würden, um einen Faktor $(m_1+m_2)/m_1$. Wenn der erste Massepunkt anfänglich in Ruhe ist, also $q_1(0) = 0$ und $\dot{q}_1(0) = 0$ gilt ist

$$q_1(t) = -\frac{m_2 l}{m_1+m_2}q_2(0)\cos(\omega t). \tag{5.70}$$

Der erste Massenpunkt schwingt also ebenso hin und her, mit der gleichen Frequenz. Mit welcher Amplitude, bestimmt das Verhältnis der Massen. Für sehr große Massen m_1 finden wir einfach wieder das bekannte Pendel, bei dem sich q_1 nahezu gar nicht bewegt und die Frequenz im wesentlichen die bekannte mit $\omega^2 = G/l$ ist.

[2] Diese Notation ist die Landau-Notation.

5.4 Lagrangesche Methode zweiter Art

5.4.1 Eliminierung von Zwangskräften durch Projektion

Wir haben die zweite Strategie der Lösung durch Eliminierung der Zwangskräfte durch Projektion auf die Mannigfaltigkeit $A(t)$ kennengelernt. Hier wollen wir diese Strategie systematisch entwickeln. Wir gehen wieder aus von den Koordinaten auf der Mannigfaltigkeit $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_f)$. Nach Konstruktion sind die Zwangsbedingungen auf dieser Mannigfaltigkeit $A(t)$ erfüllt, so dass automatisch

$$S_j(\bar{r}(\mathbf{q}, t), t) = 0 \tag{5.71}$$

für alle Zeiten $t \geq 0$: Dies war ja gerade die definierende Eigenschaft dieser Mannigfaltigkeit. Wenn man die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\nabla U(\bar{r}(t), t) + \bar{Z}(t) \tag{5.72}$$

mit den Tangentialvektoren $\partial\bar{r}/\partial q_j$ an $A(t)$ multipliziert, für $j = 1, \ldots, J$, kann man verwenden, dass die Skalarprodukte dieser Tangentialvektoren mit den Zwangskräften (die ja senkrecht auf $A(t)$ stehen) verschwinden. So erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{r}}{\partial q_j} \cdot \dot{\bar{p}} &= -\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_j} \cdot \nabla U(\bar{r}(t), t) + \frac{\partial\bar{r}}{\partial q_j} \cdot \bar{Z}(t) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial q_j}(\bar{r}(q_1, \ldots, q_f, t)), \end{aligned} \tag{5.73}$$

weil der zweite Term verschwindet. Dieser Ausdruck ist schon recht einfach, wir wollen uns aber noch die linke Seite der Gleichung etwas genauer ansehen. Dieser ist nichts anderes als

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{r}}{\partial q_k} \cdot \dot{\bar{}} &= \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_k} \qquad (5.74) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_k}\right) - \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_k}, \end{aligned}$$

indem wir die Ableitung nach der Zeit gebildet haben und den Term, der zuviel ist, wieder abgezogen. Da aber

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial t} \tag{5.75}$$

so ist auch

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_j}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\mathbf{r}_j}{\partial q_k}. \tag{5.76}$$

Dies ist ein interessanter Ausdruck. Weiter finden wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} &= \sum_{l=1}^{f}\frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial q_k \partial t} \qquad (5.77)\\ &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial t}\right)\\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial q_k}. \qquad (5.78)\end{aligned}$$

Das Einsetzen der Gleichungen (5.75) und (5.77) liefert

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}\cdot\dot{\bar{p}} &= \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \qquad (5.79)\\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}\right) - \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial q_k}. \qquad (5.80)\end{aligned}$$

Dies können wir in Bezug setzen zur kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 = T(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t), \qquad (5.81)$$

ausgedrückt aus Formel in den neuen Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_f)$ auf $A(t)$. Dies meint für die linke Seite von (5.73)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}\cdot\dot{\bar{p}} &= \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \qquad (5.82)\\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}. \qquad (5.83)\end{aligned}$$

Somit lassen sich die f Differentialgleichungen für $t \mapsto q_j(t)$ für $j = 1, \ldots, f$ in der folgenden Weise schreiben.

Lagrangesche Gleichungen zweiter Art: Die die Zwangskräfte respektierenden Bahnkurven $t \mapsto q_j(t)$ für $j = 1, \ldots, f$ erfüllen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{5.84}$$

mit der *Lagrange-Funktion* $T - U$, also

$$\begin{aligned}(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) &\mapsto L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) && (5.85)\\ &= T(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) && (5.86)\\ &- U(\bar{r}(q_1, \ldots, q_f, t), t),\end{aligned}$$

nota bene betrachtet als Funktion der Argumente $(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots q_f, t)$.

Ist die Lagrange-Funktion bekannt – was der Fall ist, sobald man die kinetische und die potentielle Energie ausgedrückt kennt – sind die auf $A(t)$ projizierten Bewegungsgleichungen leicht herzuleiten. Durch diese Projektion sind die Zwangskräfte vollends eliminiert. Dies ist praktisch wichtig, und eine praktische, tiefe und für zukünftige Überlegungen wichtige Art, Bewegungen in der analytischen Mechanik zu beschreiben. Diese Gleichungen sind zentrale Gleichungen in diesem Kurs.

5.4.2 Beispiel des sphärischen Pendels

Dies ist tatsächlich eine praktische Art vorzugehen, wie das folgende Beispiel zeigen soll, deutlich praktischer übrigens als die Lagrangeschen Methode erster Art. Wir betrachten ein Pendel mit Fadenlänge l. Diesmal soll es sich aber nicht in der $1-2$-Ebene bewegen, sondern im ganzen $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben also wieder wie gewohnt

$$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t)). \tag{5.87}$$

Naheliegende Koordinaten für unser Problem sind Polarkoordinaten, für die

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r(t)\sin\theta(t)\cos\phi(t), && (5.88)\\ r_2(t) &= r(t)\sin\theta(t)\sin\phi(t), && (5.89)\\ r_3(t) &= -r(t)\cos\theta(t). && (5.90)\end{aligned}$$

Die Zwangsbedingung $r(t)^2 - l^2 = 0$ meint gerade $r = l$. Die Koordinaten sind also $t \mapsto \theta(t)$ und $t \mapsto \phi(t)$ und die Lagrangefunktion lautet

$$L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}), \tag{5.91}$$

wobei die alten Koordinaten in den neuen wie folgt ausgedrückt werden können,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= l(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi, && (5.92)\\ &\quad \dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi, \dot{\theta}\sin\theta), && (5.93)\\ U(\mathbf{r}) &= mGl(1-\cos\theta). \end{aligned}$$

Dies impliziert sofort, dass

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = l^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta). \tag{5.94}$$

In den passenden Koordinaten ist die Lagrangefunktion also explizit gegeben durch

$$L(\theta,\phi,\dot\theta,\dot\phi) = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) - mGl(1-\cos\theta). \tag{5.95}$$

Die Bewegungsgleichungen werden so also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0, \tag{5.96}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0. \tag{5.97}$$

Erstere Bewegungsgleichung ist nichts anderes als

$$ml^2(\ddot\theta - \dot\phi^2\sin\theta\cos\theta) + mGl\sin\theta = 0. \tag{5.98}$$

Da L von ϕ gar nicht abhängt, meint zweitere Gleichung, dass

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot\phi\sin^2\theta) = 0, \tag{5.99}$$

was heißt, dass die Größe

$$\frac{L}{\partial\dot\phi} = ml^2\dot\phi\sin^2\theta \tag{5.100}$$

eine in der Zeit erhaltene Größe ist. Verallgemeinerte Koordinaten q_j (meint also Koordinaten oder deren Ableitungen), von denen L nicht abhängt, nennt man auch *zyklisch*. Die Größen

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial\dot q_j} \tag{5.101}$$

für $j = 1,\dots,f$ sind die *verallgemeinerten Impulse*. Diese Nomenklatur ergibt viel Sinn: Immerhin ist der verallgemeinerte Impuls einer zyklischen Koordinate eine erhaltene Größe. In unserem Beispiel ist der passende verallgemeinerte Impuls $ml^2\dot\phi\sin^2\theta$ zeitunabhängig, den wir als 3-Koordinate des Drehimpulses L_3 (nicht mit der Lagrangefunktion zu verwechseln) identifizieren

$$L_3 = ml^2\dot\phi\sin^2\theta. \tag{5.102}$$

Kein Wunder also, dass sie erhalten ist. Um mit der Lösung der Bewegungsgleichung fortzufahren, können wir diese Erhaltungsgröße L_3 in die Gleichung (5.98) einsetzen und finden

$$ml^2\ddot\theta - \frac{L_3^2}{ml^2\sin^3\theta}\cos\theta + mGl\sin\theta = 0. \tag{5.103}$$

Nach Multiplikation mit $\dot\theta$ ist dies

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{L_3^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mGl\cos\theta)\right) = 0. \tag{5.104}$$

Da die Energie

$$E = T + U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{L_3^2}{2ml^2\sin^2\theta} + mGl(1-\cos\theta) \tag{5.105}$$

ist, meint dies gerade, dass die Energie erhalten ist. Man kann nun durch einfache Integration die Funktion

$$(E, L_3, t) \mapsto \theta(E, L_3, t) \tag{5.106}$$

bestimmen, und dann aus $L_3 = ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta$ auch

$$(E, L_3, t) \mapsto \phi(E, L_3, t). \tag{5.107}$$

Dies ist die Lösung des Problems. In der Tat ist dies in θ wiederum ein Problem, das als ein eindimensionales Problem aufgefasst werden kann in einem effektiven Potential

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{L_3^2}{2ml^2\sin^2\theta} + mGl(1-\cos\theta). \tag{5.108}$$

Wenn nun $L_3 = 0$ ist, liegt ein ebenes Pendel vor, wie wir es kennen. Sonst gibt es ein Minimum von U_{eff}, Wählt man bei vorgegebenem E den Drehimpuls L_3 passend zu diesem Minimum, erhält man eine Kreisbahn.

5.4.3 Abschließende Bemerkungen

Interessant ist zu bemerken, was mit der Lagrangeschen Methode zweiter Art passiert, wenn gar keine Zwangskräfte vorliegen. Dann haben wir für n Teilchen $f = 3n$ Freiheitsgrade. Wir können für die die kartesischen Koordinaten wählen und haben so die Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{r}_j^2 - U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n). \tag{5.109}$$

Nun sind

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} = \frac{d}{dt} m_j \dot{\mathbf{r}}_j = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \tag{5.110}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_j} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_j}. \tag{5.111}$$

Die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_j} = 0 \tag{5.112}$$

sind also gerade identisch mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j + \nabla_j U = 0. \tag{5.113}$$

Dies ist wenig überraschend, da das Problem ja genau das der Newtonschen Mechanik ist. Die Lagrangesche Mechanik kann so dennoch als allgemeine Methode aufgefasst werden, die Bewegungsgleichung bei frei wählbaren Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ aufzustellen. Frei wählbar" heißt hier, dass alle Koordinaten legitim sind, so lange sie $A(t)$ parametrisieren. Geht man über von einem Koordinatensatz zu $(q_1, \ldots, q_f)$ zu $(v_1, \ldots, v_f)$, so dass

$$q_j = q_j(v_1, \ldots, v_f, t) \tag{5.114}$$

für $j = 1, \ldots, f$, und so

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial q_j}{\partial v_k} \dot{v}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t} \tag{5.115}$$

ist, so findet man die neue Lagrangefunktion

$$(v_1, \ldots, v_f, \dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_f, t) \mapsto V(v_1, \ldots, v_f, \dot{v}_1, \ldots, \dot{v}_f, t). \tag{5.116}$$

Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{v}_j} - \frac{\partial V}{\partial v_j} = 0 \tag{5.117}$$

haben den gleichen physikalischen Gehalt wie die ursprünglichen.