Analytische Mechanik (20113401)
Vorlesender: Jens Eisert.
Kapitel 6: Symmetrien und das Noether-Theorem

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 6

Symmetrien und das Noether-Theorem

6.1 Vorbemerkungen

Symmetrien, Invarianzen und Erhaltungssätze sind von enormer Wichtigkeit in der Physik. In der Tat haben die meisten Systeme bestimmte Symmetrien aufzuweisen, was in aller Regel damit einhergeht, dass die Beschreibung dieser Systeme invariant unter bestimmten Transformationen sind. Diese Transformationen weisen oft eine Gruppenstruktur auf. Die Wichtigkeit von Symmetrien ist keinesfalls auf die analytische Mechanik beschränkt: In der Quantenmechanik sind Symmetrien etwa ubiquitär, wichtige Konzepte wie die der topologischen Ordnung bauen auf Symmetrien auf. Auch in der Elektrodynamik und der Relativitätstheorie sind Symmetrien von erheblicher Wichtigkeit. Wir werden in diesem Kapitel eine ersten systematischen Kontakt mit der Theorie von Symmetrien aufnehmen. Die Schlüsseleinsicht ist die, dass Symmetrien mit einer Vereinfachung der Beschreibung einhergehen, und mit Erhaltungssätzen. Dieses Kapitel ist ein kurzes, aber wichtiges Kapitel.

6.2 Symmetrien

6.2.1 Beispiel des sphärischen Pendels

Wir wollen uns kurz das Beispiel des spärischen Pendels des letzten Kapitels ins Bewusstsein rufen. Hier war eine verallgemeinerte Koordinate q_j zyklisch, und wir haben gesehen, dass diese Eigenschaft sofort zu einem Erhaltungssatz führt. Ist die Lagrangefunktion unabhängig von q_j, so lautet in der Tat

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0. \tag{6.1}$$

So ist in der Tat

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{6.2}$$

eine erhaltene Größe. Die Tatsache, dass die Lagrangefunktion

$$L(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - mGl(1 - \cos\theta). \tag{6.3}$$

unabhängig ist von der Variablen ϕ heißt auch, dass die Lagrangefunktion invariant ist unter Drehungen um die 3-Achse: Denn diese sind ja gerade, was dieser Winkel parametrisiert. Es handelt sich hier also um eine Symmetrie.

6.2.2 Invarianzen in Lagrangefunktionen

Gegeben seien bei $f = 3n - J$ Freiheitsgraden die verallgemeinerten Koordinaten

$$q(t, \alpha) = (q_1(t, \alpha), \ldots, q_f(t, \alpha)) \tag{6.4}$$

als eine Sammlung einer Schar von Funktionen $q_j : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, die

$$q(t, 0) = (q_1(t, 0), \ldots, q_f(t, 0)) = (q_1(t), \ldots, q_f(t)) \tag{6.5}$$

erfüllen mit der Eigenschaft, dass

$$L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t). \tag{6.6}$$

Der Parameter α parametrisiert also eine *Invarianz der Lagrangefunktion* die einer *Symmetrie* entspricht. In welcher Weise entsprechen solche Symmetrien nun allgemeinen Erhaltungssätzen? Da die linke Seite unabhängig von α ist, folgt sicher

$$\frac{d}{d\alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t)|_{\alpha=0} = 0. \tag{6.7}$$

Ausgeschrieben bedeutet dies, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right) |_{\alpha=0} \\ &= \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right) |_{\alpha=0} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha}|_{\alpha=0}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

wenn $t \mapsto q(t)$ eine Lösung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen ist.

6.3 Das Noethersche Theorem

6.3.1 Formulierung der Aussage

So haben wir eine allgemeine Aussage gewonnen. Diese Aussage nennt man das *Noethersche Theorem*, das tatsächlich weitreichende Konsequenzen hat: Kurz gesagt kommt jede Symmetrie einher mit einer Erhaltungsgröße.

Noether-Theorem: Weist die Lagrangefunktion eine Symmetrie auf und ist die Lagrangefunktion also invariant unter Transformationen

$$q_j(t) \mapsto q_j(t,\alpha) \tag{6.9}$$

für $j = 1, \ldots, f$, also ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$L(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t), \tag{6.10}$$

so ist die Größe

$$\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \eta_j \tag{6.11}$$

mit

$$\eta_j := \frac{\partial q_j}{\partial \alpha}|_{\alpha=0}. \tag{6.12}$$

eine zeitlich erhaltene Konstante und also eine Erhaltungsgröße, wenn $t \mapsto q(t)$ die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen löst.

6.3.2 Translationen

Das Noethersche Theorem ist praktisch gut anwendbar. Eine erste Anwendung reflektiert die Situation, dass L invariant unter Translationen im Raum ist,

$$\mathbf{r}_j(t) \mapsto \mathbf{r}_j(t,\alpha) = \mathbf{r}_j(t) + \alpha \mathbf{e}, \tag{6.13}$$

wobei $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor ist. Diese Situation haben wir schon oft kennengelernt. Sie liegt insbesondere dann vor, wenn das Potential $U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$ nur von den Differenzvektoren $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ abhängt. Konkret gilt dann

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 - U(\ldots, \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k, \ldots, t). \tag{6.14}$$

So ist auch $f = 3n$ und

$$(q_1, \ldots, q_f) = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n), \tag{6.15}$$

wobei wir in einem offensichtlichen Isomorphismus Vektoren identifiziert haben. Wir finden so

$$\eta_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j(t,\alpha)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = \mathbf{e}, \tag{6.16}$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \cdot \mathbf{e} = \sum_{j=1}^{n} (m_j \dot{\mathbf{r}}_j) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}, \tag{6.17}$$

wobei wie oben definiert

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \tag{6.18}$$

der Gesamtimpuls ist. Da der Einheitsvektor $\mathbf{e}$ beliebig gewählt wurde, sieht man, dass in Systemen, die invariant unter Translationen im Raum sind, der Gesamtimpuls erhalten ist. Gilt diese Invariant nur für eine oder mehrere Komponenten, so sind auch nur die entsprechenden Komponenten des Gesamtimpulses erhalten. Dies ist zwar keine neue physikalische Aussage, aber dennoch ein frischer Blick auf eine bekannte Situation. In einer Situation, bei der Zwangsbedingungen vorliegen, ist das Noethersche Theorem nichttrivial.

6.3.3 Drehungen

Eine weitere, immer noch bekannte, Situation ist die, bei der wir Drehungen um eine Achse betrachten, um einen Winkel α. Sei diese Achse durch $\mathbf{e} = (0,0,1)$ gegeben. Dann sind die Drehungen gegeben durch

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3) \tag{6.19}$$

der speziellen orthogonalen Gruppe. So gilt für die verdrehten Koordinaten

$$\mathbf{r}(t,\alpha)^T := D(\alpha)\mathbf{r}(t,0)^T \tag{6.20}$$

die Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\alpha)}{\partial \alpha}^T |_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}(t,0)^T = ((0,0,1) \times \mathbf{r}(t,0))^T. \tag{6.21}$$

Die Transposition ist nur nötig, weil wir nach obiger Konvention Vektoren als Zeilenvektoren geschrieben haben. Einen analogen Ausdruck würden wir natürlich bei einer Drehung um eine beliebige Achse $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ erhalten,

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\alpha)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}(t,0). \tag{6.22}$$

So gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_j) &= \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_j) \qquad (6.23)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}.\end{aligned}$$

Die $\mathbf{n}$-Komponente des Drehmimpulses ist also eine erhaltene Größe. Allgemeiner ist es so, dass wenn man Invarianz unter einer Gruppe hat, die Generatoren der Gruppe erhalten sind.

Überhaupt, ist die potentielle Energie U nur abhängig von den Differenzen der Koordinaten als $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$, was oft der Fall ist, dann ist die Lagrange-Funktion auch invariant unter Drehungen, weil die Skalarprodukte in der kinetischen Energie ja auch invariant unter Drehungen sind. Also ist auch dann der Drehimpulsvektor $\mathbf{L}$ eine erhaltene Größe. Es sollte klar sein, dass man sehr allgemeine Invarianzen so erfassen kann und die entsprechenden Erhaltungsgrößen identifizieren, auch unter Zwangsbedingungen.

6.4 Mathematisches Intermezzo

6.4.1 Gruppen

Da Gruppen hier eine zentrale Rolle spielen, wollen wir dies als unsere Ausrede werten, uns deren Eigenschaften nochmals vor Augen zu halten. Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, *)$ aus einer Menge G und einer Verknüpfung $* : G \times G \to G$, mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle Gruppenelemente a, b, c gilt die *Assoziativität*
$$(a * b) * c = a * (b * c). \qquad (6.24)$$
- Es gibt ein (einziges) *neutrales Element* $e \in G$, mit dem für alle Gruppenelemente $a \in G$
$$a * e = e * a = a \qquad (6.25)$$
gilt.
- Zu jedem Gruppenelement $a \in G$ existiert ein (einziges) *inverses Element* $a^{-1} \in G$ mit
$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e. \qquad (6.26)$$

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn für alle $a, b \in G$

$$a * b = b * a \qquad (6.27)$$

gilt. Die oben betrachteten Drehungen bilden eine Gruppe – keine abelsche, wessen man sich leicht vergewissert – wie auch die Translationen. Die meisten in der Physik realisierten Symmetrien können durch Gruppen gefasst werden.

6.5 Verallgemeinertes Noether-Theorem

6.5.1 Allgemeine Invarianzen

Tatsächlich kann die obige Beweisidee auf eine allgemeinere Klasse von Invarianzen angewendet werden. In der Tat kann man die gleichen Schritte verfolgen.

Verallgemeinertes Noether-Theorem: Ist die Lagrange-Funktion nicht invariant, aber gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t)|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} f(q(t), \dot{q}(t), t) \tag{6.28}$$

für eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$, dann ist

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \eta_j - f(q, \dot{q}, t) \tag{6.29}$$

eine erhaltene Größe.

6.5.2 Translationen in der Zeit

Eine spannende Invarianz ist nicht eine im Ort, sondern in der *Zeit*. Dies meint, dass wir Transformationen $t \mapsto t + \alpha$ betrachten, so dass also

$$q(t, \alpha) = q(t + \alpha) \tag{6.30}$$

gilt. Dann haben wir

$$\frac{d}{dt} L(q(t+\alpha), \dot{q}(t+\alpha), t)|)_{\alpha=0} = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) |_{\alpha=0}. \tag{6.31}$$

Fü die unveränderte Lagrangefunktion finden wir allerdings

$$\frac{d}{dt} L(q(t), \dot{q}(t), t)|) = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{6.32}$$

Wenn nun die Lagrangefunktion L nicht explizit von der Zeit abhängt, finden wir also

$$\frac{d}{dt} L(q(t+\alpha), \dot{q}(t+\alpha), t)|)_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} L(q(t), \dot{q}(t), t)|). \tag{6.33}$$

Dies meint, dass die Bedingungen der verallgemeinerten Noether-Theorems vorliegen, wobei die Rolle von f die Lagrangefunktion L selber nimmt. So ist

$$\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L(q, \dot{q}) \tag{6.34}$$

eine Erhaltungsgröße. In kartesischen Koordinaten lautet diese Größe

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \dot{\mathbf{r}}_j - L &= \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 + U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \\ &= T + U = E. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Dies ist nichts anderes als die Gesamtenergie selbst. Die Energie ist also erhalten als Konsequenz der Invarianz unter Translationen in der Zeit. Die Aussage selber mag wenig überraschend sein, der Lösungsweg allerdings schon. Und nicht, dass der Eindruck entsteht, diese Aussagen gelten nur ohne Zwangsbedingungen. Wenn zeitunabhängige (also holonom-skleronome) Zwangsbedingungen vorliegen und wir die verallgemeinerten Koordinaten $(q_1, \ldots, q_n)$ finden können, in denen wir die kartesischen Koordinaten ausdrücken können, erhalten wir für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \sum_{k,l=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{f} g_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l, \tag{6.36}$$

wobei für $k, l = 1, \ldots, f$,

$$g_{k,l} := \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_l}. \tag{6.37}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j &= \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_{k,l=1}^{f} g_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \\ &= 2T. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Die Erhaltungsgröße ist also

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \dot{\mathbf{r}}_j - L = 2T - T + U = T + U = E, \tag{6.39}$$

also wieder die Gesamtenergie. Dies mag wiederum wenig überraschend sein: Allerdings muss man sich vor Augen halten, dass dies unter beliebigen Zwangsbedingungen gilt. Ohne den entwickelten Formalismus wären wir nicht imstande gewesen, zu derartigen Aussagen zu kommen.