Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 2
Vektorrechnung und Arbeit

Abgabe bis: 08.05.2020 um 12:00

---

1. **In einem Kraftfeld** [2 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte]
   Wir betrachten die Bewegung einer Punktmasse im $\mathbb{R}^3$. Auf die Masse wirkt ein Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (\lambda r_2, \lambda r_1, \mu)^T$, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ positive Konstanten sind.
   a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{F}$ eine konservative Kraft ist.
   b) Die Punktmasse soll auf einer Geraden vom Punkt $\boldsymbol{Q}_0 = (0,0,0)^T$ zum Punkt $\boldsymbol{Q} : (q_1, q_2, q_3)^T$ verschoben werden. Berechnen Sie die dazu aufzuwendende Arbeit.
   c) Geben Sie das Potential der Kraft $\boldsymbol{F}$ an.
   d) Wir verschieben nun die Punktmasse längs der Koordinatenachsen nacheinander von Q_0 zu Q, d.h. entlang des Weges $(0,0,0)^T \to (r_1,0,0)^T \to (r_1,r_2,0)^T \to (r_1,r_2,r_3)^T$. Wie ändert sich die dazu aufzubringende Arbeit im Vergleich zu Aufgabenteil 1b?

2. **Der total antisymmetrische Tensor** ϵ_{ijk} [5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10 Punkte]
   Seien $\hat{\mathbf{e}}_i$ ($i = 1, 2, 3$) die Basisvektoren eines orthonormalen Koordinatensystems:
   $$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}.$$
   Der total antisymmetrische Tensor ϵ_{ijk} (ein Tensor dritter stufe) ist definiert über:
   $$\epsilon_{ijk} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot (\hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_k) = \begin{cases} 1 & \text{für i, j, k=1, 2, 3 und zyklische Vertauschungen} \\ -1 & \text{für i, j, k=3, 2, 1 und zyklische Vertauschungen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
   Der so definierte Tensor ist insbesondere nützlich bei der berechnung von Vektorprodukten. Ein Kreuzprodukt aus zwei Vektoren in der obigen Basis $\mathbf{a} = a_i\hat{\mathbf{e}}_i$ und $\mathbf{b} = b_i\hat{\mathbf{e}}_i$ lässt sich damit wie folgt schreiben:
   $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{\mathbf{e}}_i.$$
   Wir benutzen dabei die *Einstein'sche Summenkonvention.* Das heißt, dass über zwei gleiche Indizes implizit summiert wird, und das Summenzeichen nicht mehr mitgeschrieben wird.
   a) Zeigen Sie
   $$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}.$$
   Hinweis: Verwenden Sie den Zusammenhang zwischen dem Spatprodukt und der Determinante.
   b) Zeigen Sie damit foldende Beziehungen:
   $$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km},$$
   $$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn},$$
   $$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6,$$

und die sogenannte *bac-cab* regel:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Der Nabla operator ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Damit definieren sich die **Divergenz** und **Rotation** eines differenzierbaren Vektorfeldes wie folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A_i, \quad \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k) \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Sei $|\mathbf{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ und $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein zweifach differenzierbares Vektorfeld. Berechnen Sie (für $|\mathbf{r}| \neq 0$):

c) $\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|}$,

d) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{|r|^3} \right)$,

e) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$.

3. **Wie man der Erde entflieht** [2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte]

Wir definieren die *Fluchtgeschwindigkeit* eines Teilchens als die minimal notwendige Geschwindigkeit auf der Erdoberfläche, damit das Teilchen das Gravitationsfeld der Erde verlassen kann.

a) Zeigen Sie, dass unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes, sowie des Einflusses anderer Massen als der Erdmasse, die Fluchtgeschwindigkeit für die Erde 11.2 km/s beträgt.

Wir würden gerne abschätzen wie viel Treibstoff notwendig ist, damit eine Rakete diese Fluchtgeschwindigkeit erreichen kann. Raketen werden durch den Gegenimpuls der am Heck ausgestoßenen Gase angetrieben. Das Verbrennen des Treibstoffes führt jedoch auch dazu, dass die Gesamtmasse der Rakete nicht konstant ist, sondern als Funktion der Zeit abnimmt.

b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung einer Rakete entlang der vertikalen Achse im homogenen Gravitationsfeld unter Vernachlässigung der Luftreibung gegeben ist durch

$$m \frac{dv}{dt} = -v_g \frac{dm}{dt} - mg.$$

Hier sind m die Masse der Rakete und v_g die konstante Geschwindigkeit der Gase, die dem Düsenantrieb der Rakete entweichen.

c) Die Anfangsmasse der Rakete sei $m_0 = m_e + m_f$. m_e sei die Masse der leeren Rakete, und m_f sei die Anfangsmasse des Treibstoffes. Zusätzlich nehmen wir an, dass der Treibstoff mit konstanter Rate verbrennt wird, also $dm/dt = v_f =$ const.. Integrieren Sie die obige Bewegungsgleichung und bestimmen Sie $v = v(t\,; m_e, m_0, v_f, v_g, g)$.

d) Nehmen wir an, die Rakete sei anfänglich in Ruhe, dass $v_g = 2.07$ km/s, und dass die Rakete ein Sechzigstel seiner anfänglichen Treibstoffmasse pro Sekunde verbrennt. Zeigen Sie, dass unter diesen Bedingungen, ein Gewichtsverhältnis von $m_f/m_e \approx 300$ notwendig ist, damit die Rakete ihre Fluchtgeschwindigkeit erreichen kann.

4. **Newton vs. Galilei vs. Aristoteles** [2 Punkte]

Die moderne Formulierung von Bewegungsgleichungen beginnt mit Newton. Gedanken über freien Fall haben sich Menschen allerdings schon viel früher gemacht. Z.B. kam der griechische Philosoph Aristoteles zu dem naheliegenden Prinzip das schwere Objekte schneller fallen als leichte. Dem widersprach der Astronom Galilei und erdachte das folgende Gedankenexperiment:

Betrachte zwei Objekte A und B, wobei A schwerer ist als B. Kleben wir nun beide Objekte zusammen, so müsste A den Fall von B bremsen, gleichzeitig is das kombinierte Objekt aber schwerer als B und müsste nach unserer Annahme schneller fallen, was zum Widerspruch führt.

Welche versteckte Annahme macht Galilei in seiner Argumentation? Was macht Gravitation so besonders?