Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 1
Vektoren & Newtonsche Mechanik

Abgabe bis: 01.05.2020 um 12:00

---

1. **Fische fangen** [1 + 3 + 2 = 6 Punkte]

   In der Vorlesung haben Sie das erste Newtonsche Axiom kennen gelernt, gemäß dessen ein Teilchen in einem Inertialsystem ohne äußere Krafteinwirkung im Zustand einer geradlinig-gleichmäßigen Bewegung verharrt. In dieser Aufgabe wollen wir uns mit diesen Begriffen weiter auseinander setzen.

   Wir betrachten die Bewegung dreier Unterwassersonden eines Fischerbootes, die zusammen ein Netz aufspannen relativ zum Intertialsystem des Fischerbootes. Alle Sonden starten vom selben Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (0, 0, -5)^T$ unterhalb des Bootes und sind so gebaut, dass die Reibung vernachlässigt werden kann.

   In diesem Inertialsystem ist die Bewegung der ersten Sonde gegeben durch den Geschwindigkeitsvektor

   $$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} ms^{-1}.$$

   Von der ersten Sonde aus gesehen bewegt sich die zweite Sonde mit einer Geschwindigkeit

   $$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} ms^{-1}.$$

   a) Berechnen Sie die Kurve, auf der sich die zweite Sonde bewegt im Inertialsystem des Fischerbootes.

   Eine dritte Sonde bewegt sich mit Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}_3 = (a, 0, b)^T$ so, dass das Wasservolumen, das von dem sich aufspannenden Netz nach 10 Sekunden durchdrungen wird $V = 1000m^3$ beträgt. Wir berechnen nun die Geschwindigkeit der dritten Sonde unter der Annahme, dass die Geschwindigkeitsvektoren $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_3$ senkrecht aufeinander stehen.

   b) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, dass durch die zwei Bedingungen auf $\boldsymbol{v}_3$ gegeben ist. *Hinweis: Das Volumen eines durch drei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ aufgespannten Parallelepipeds im $\mathbb{R}^3$ kann man als $|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ berechnen.*

   c) Lösen Sie dieses Gleichungssystem.

2. **Trajektorien** [1 + 3 + 1 + 2 = 7 Punkte]

   Wir betrachten den euklidischen Raum als ein Inertialsystem. Die Bewegung eines Teilchen in diesem Raum wird durch die Funktion $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^3$,

   $$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{b} \sin(\omega t) + \boldsymbol{c} \cos(\omega t) + \boldsymbol{d}\, \omega^2 t,$$

   beschrieben, wobei $\omega \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist und

   $$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ des Teilchen in Abhängigkeit von t.

b) Skizzieren sie den Weg des Teilchens in einer geeigneten Art. Zeichnen Sie die Vektoren $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$ sowie $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{a}(t)$ für zwei bestimmte Werte ihrer Wahl für t in die Skizze ein.

c) Ist ein Koordinatensystem, in wechem das Teilchen in Ruhe ist, ein Intertialsystem? Begründen Sie Ihre Antwort.

Wir definieren ein weiteres Koordinatensystem wie folgt: $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0)^T$ $\boldsymbol{y} = (0, 1, 0)^T$ und $\boldsymbol{z} = (0, 0, \omega^2 t)^T$.

d) Handelt es sich bei diesem Koordinatensystem $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, um ein Inertialsystem? Skizzieren sie die Bewegung des Teilchen in diesem Koordinatensystem.

3. **Newtonsche Reibung** [1 + 1 + 5 + 1 + 2 = 9 Punkte]

In dieser Aufgabe betrachten wir eine punktförmige Masse m, die zum Zeitpunkt $t = 0$ fallengelassen wird. Auf die Masse wirken nun zwei Kräfte: Die Schwerkraft $F_G = gm$ und eine zweite Kraft F_R, die den Luftwiderstand beschreibt. Im Gegensatz zu der Stokesschen Reibung ($F_R = -k'v$), wie sie in der Vorlesung erwähnt wurde, betrachten wir hier die sogenannte Newtonsche Reibung: $F_R = -kv^2$.

a) Erklären Sie, weshalb die folgende Bewegungsgleichung gilt:

$$\dot{v} + \frac{k}{m} v^2 = g \tag{$*$}$$

b) Lösen Sie diese Differentialgleichung ($*$) für $v(0) = 0$. *Hinweis: Verwenden Sie Trennung der Variablen.*

c) Wie verhält sich die Lösung für sehr große t.

d) Welches Verhalten erwarten Sie für Stokesche Reibung? Begründen Sie Ihre Antwort.