Freie Universität Berlin

Analytische Mechanik

Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 2
Vektorrechnung und Arbeit

Abgabe bis: 08.05.2020 um 12:00

---

1. **In einem Kraftfeld** [2 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte]
   Wir betrachten die Bewegung einer Punktmasse im $\mathbb{R}^3$. Auf die Masse wirkt ein Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (\lambda r_2, \lambda r_1, \mu)^T$, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ positive Konstanten sind.
   a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{F}$ eine konservative Kraft ist.
   b) Die Punktmasse soll auf einer Geraden vom Punkt $\boldsymbol{Q}_0 = (0,0,0)^T$ zum Punkt $\boldsymbol{Q} : (q_1, q_2, q_3)^T$ verschoben werden. Berechnen Sie die dazu aufzuwendende Arbeit.
   c) Geben Sie das Potential der Kraft $\boldsymbol{F}$ an.
   d) Wir verschieben nun die Punktmasse längs der Koordinatenachsen nacheinander von Q_0 zu Q, d.h. entlang des Weges $(0,0,0)^T \to (r_1,0,0)^T \to (r_1,r_2,0)^T \to (r_1,r_2,r_3)^T$. Wie ändert sich die dazu aufzubringende Arbeit im Vergleich zu Aufgabenteil 1b?

2. **Der total antisymmetrische Tensor** ϵ_{ijk} [5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10 Punkte]
   Seien $\hat{\mathbf{e}}_i$ ($i = 1,\ 2,\ 3$) die Basisvektoren eines orthonormalen Koordinatensystems:

   $$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}.$$

   Der total antisymmetrische Tensor ϵ_{ijk} (ein Tensor dritter stufe) ist definiert über:

   $$\epsilon_{ijk} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot (\hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_k) = \begin{cases} 1 & \text{für i, j, k=1, 2, 3 und zyklische Vertauschungen} \\ -1 & \text{für i, j, k=3, 2, 1 und zyklische Vertauschungen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Der so definierte Tensor ist insbesondere nützlich bei der berechnung von Vektorprodukten. Ein Kreuzprodukt aus zwei Vektoren in der obigen Basis $\mathbf{a} = a_i\hat{\mathbf{e}}_i$ und $\mathbf{b} = b_i\hat{\mathbf{e}}_i$ lässt sich damit wie folgt schreiben:

   $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{\mathbf{e}}_i.$$

   Wir benutzen dabei die *Einstein'sche Summenkonvention.* Das heißt, dass über zwei gleiche Indizes implizit summiert wird, und das Summenzeichen nicht mehr mitgeschrieben wird.
   a) Zeigen Sie

   $$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}.$$

   Hinweis: Verwenden Sie den Zusammenhang zwischen dem Spatprodukt und der Determinante.

Solution: Das Spatprodukt dreier Vektoren kann als Determinante einer Matrix dargestellt werden

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix}.$$

Damit ergibt sich mit der Definition des $\epsilon-$tensors, der Multiplikativität und der Symmetrie unter Transposition der Determinante

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} &= \hat{\mathbf{e}}_i \cdot (\hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_k)\hat{\mathbf{e}}_l \cdot (\hat{\mathbf{e}}_m \times \hat{\mathbf{e}}_n) \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_i & \hat{\mathbf{e}}_j & \hat{\mathbf{e}}_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_l & \hat{\mathbf{e}}_m & \hat{\mathbf{e}}_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_i^T \\ \hat{\mathbf{e}}_j^T \\ \hat{\mathbf{e}}_k^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_l & \hat{\mathbf{e}}_m & \hat{\mathbf{e}}_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_l & \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_m & \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \\ \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_l & \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_m & \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \\ \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_l & \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_m & \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}.
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie damit foldende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}, \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} &= 2\delta_{kn}, \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 6,
\end{aligned}$$

Solution: In der oben hergeleiteten Forel setzen wir $l = i$ und summieren darüber:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} &= \underbrace{\delta_{ii}}_{3}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \underbrace{\delta_{im}\delta_{ji}}_{\delta_{jm}}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} \\
&= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.
\end{aligned}$$

Beachte, dass unter der Einsteinschen Summenkonvention $\delta_{ii} = \sum_i \delta_{ii} = 3$ gilt. Nun setzen wir dazu $m = j$ und summieren

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} &= \underbrace{\delta_{jj}}_{3}\delta_{kn} - \underbrace{\delta_{jn}\delta_{kj}}_{\delta_{kn}} \\
&= 2\delta_{kn},
\end{aligned}$$

und auch für $k = n$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 2\delta_{kk} \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Damit sind die Gleichungen gezeigt.

und die sogenannte *bac-cab* regel:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Solution: Wir schreiben das doppelte Kreuzprodukt in Komponentenschreibweise und wenden die Relation aus $1\,b)$ an.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i &= \epsilon_{ijk} a_j (\epsilon_{klm} b_l c_m) \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m \\
&= b_i a_j c_j - c_i a_j b_j \\
&= (\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}))_i .
\end{aligned}$$

Der Nabla operator ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Damit definieren sich die **Divergenz** und **Rotation** eines differenzierbaren Vektorfeldes wie folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A_i, \quad \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k) \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Sei $|\mathbf{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ und $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein zweifach differenzierbares Vektorfeld. Berechnen Sie (für $|\mathbf{r}| \neq 0$):

c) $\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|}$,

Solution: Wir berechnen Komponentenweise und wenden die Kettenregel an,

$$\begin{aligned}
\partial_i \frac{1}{|\mathbf{r}|} &= \partial_i (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{-\frac{3}{2}} (2 r_i) \\
&= -\frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3}, \\
\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|} &= -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.
\end{aligned}$$

d) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{|r|^3} \right)$,

Solution:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} &= \partial_i \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} \\
&= \frac{(\partial_i r_i)|\mathbf{r}|^3 - r_i \partial_i |\mathbf{r}|^3}{|\mathbf{r}|^6} \\
&= \frac{3|\mathbf{r}|^3 - 3|\mathbf{r}|^3}{|\mathbf{r}|^6} = 0.
\end{aligned}$$

e) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$.

Solution: Mit dem Satz von Schwarz vertauschen die partiellen Ableitungen (da die Funktion $\mathbf{A}$ zweifach stetig differenzierbar ist), doch ist der ϵ-Tensor antisymmetrisch. So haben wir

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k(\mathbf{r}) \\ &= \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_i A_k(\mathbf{r}) \\ &= \epsilon_{jik}\partial_i\partial_j A_k(\mathbf{r}) \\ &= -\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k(\mathbf{r}) \\ &= -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\end{aligned}$$

In der Zweiten Zeile haben wir die partiellen Ableitungen vertauscht, in der dritten haben wir die Variablen umbenannt ($i \to j$, $j \to i$). Das dürfen wir da über die Variablen summiert wird und die Summe am Ende unabhängig davon ist, wie die Summationsvariablen heissen. Nun gilt für jede reelle Zahl (oder komplexe Zahl) X, dass $X = -X$ nur gelten kann wenn $X = 0$ ist. Damit haben wir

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

3. **Wie man der Erde entflieht** [2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte]

   Wir definieren die *Fluchtgeschwindigkeit* eines Teilchens als die minimal notwendige Geschwindigkeit auf der Erdoberfläche, damit das Teilchen das Gravitationsfeld der Erde verlassen kann.

   a) Zeigen Sie, dass unter Vernachlässigung des Luftwiederstandes, sowie des Einflusses anderer Massen als der Erdmasse, die Fluchtgeschwindigkeit für die Erde 11.2 km/s beträgt.

Solution: Durch die Annahme, dass der Luftwiderstand vernachlässigbar ist, ist das system konservativ, d.h. die Energie des Systemes bleibt erhalten. Da wir andere Massen vernachlässigen, ist die Energie schlicht gegeben durch die Summe der kintetischen Energie des Teilchens und sein Poential im Gravitationsfeld. So haben wir als Erhaltungsgröße

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} \\ &= K(t) + U(t),\end{aligned} \tag{0.1}$$

mit $v = v(t)$ und $r = r(t)$. Das Teilchen hat das Gravitationsfeld der Erde verlassen, wenn gilt $U(t') = 0$ für eine bestimmte Zeit t' - dies gilt hier im Limes $r \to \infty$. Lassen wir ein Teilchen auf der Erde mit Geschwindigkeit v radial nach außen starten, muss also $E = E_0 = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GMm}{r_\odot} \geq 0$ gelten, damit die kinetische Energie ausreicht um das Gravitationspotential zu überwinden. Da E monoton mit v_0 steigt, ist die Mimalgeschwindigkeit durch $E = 0$ gegeben. In diesem Fall hat das Teilchen eine Geschwindigkeit $v = 0$ nachdem es das das Gravitationspotential überwunden hat. Somit lösen wir

$$0 = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GMm}{r_\odot}, \tag{0.2}$$

nach v_0 aufgelöst ergibt das

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_\odot}}. \tag{0.3}$$

Um den numerischen wert von v_0 zu erhalten setzten wir ein

$$\begin{aligned}
G &= 6.674 \times 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}, \\
M &= 5.972 \times 10^{24} kg, \\
r_{\odot} &= 6.371 \times 10^6 m,
\end{aligned}$$

mit $r_{\odot} = 6.371 \times 10^6 m$ der Erdradius, und M der Erdmasse.
Wir würden gerne abschätzen wie viel Treibstoff notwendig ist, damit eine Rakete diese Fluchtgeschwindigkeit erreichen kann. Raketen werden durch den Gegenimpuls der am Heck ausgestoßenen Gase angetrieben. Das Verbrennen des Treibstoffes führt jedoch auch dazu, dass die Gesamtmasse der Rakete nicht konstant ist, sondern als Funktion der Zeit abnimmt.

b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung einer Rakete entlang der vertikalen Achse im homogenen Gravitationsfeld unter Vernachlässigung der Luftreibung gegeben ist durch

$$m\frac{dv}{dt} = -v_g\frac{dm}{dt} - mg.$$

Hier sind m die Masse der Rakete und v_g die konstante Geschwindigkeit der Gase, die dem Düsenantrieb der Rakete entweichen.

Solution: Wir beginnen mit Newtons zweiter Regel

$$\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= F_{\text{tot}} \\
&= F_{\text{gas}} + F_{\text{grav}},
\end{aligned} \tag{0.4}$$

sodass die auf das Teilchen wirkende Kraft F_{tot} durch die summe der Gravitationskraft F_{grav} und der Rückstoßkraft der ausgetoßenen Gase F_{gas} gegeben ist. Da wir vereinfacht annehmen, dass die Gravitationskraft konstant ist und entgegengesetzt der Raketen bewegung wirkt, gilt $F_{\text{grav}} = -mg$. Newtons drittes Gesetz besagt, dass die auf die Rakete wirkende Rückstoßkraft gleich gleich der Kraft ist, die die Rakete auf die Gase ausübt, welche über Newtons zweites Gesetz durch die Ämderung seinet Impulse p_{gas} gegeben ist. So haben wir

$$\begin{aligned}
F_{\text{gas}} &= -\frac{dp_{gas}}{dt} \\
&= -\frac{dmv_g}{dt} \\
&= -v_g\frac{dm}{dt}.
\end{aligned} \tag{0.5}$$

Durch das Verbrennen von Treibstoff verliert die Rakete Masse, so gilt $\frac{dm}{dt} < 0$ und F_{gas} wirkt nach oben. Domit haben wir für (0.4) insgesamt

$$m\frac{dv}{dt} = -v_g\frac{dm}{dt} - mg.$$

c) Die Anfangsmasse der Rakete sei $m_0 = m_e + m_f$. m_e sei die Masse der leeren Rakete, und m_f sei die Anfangsmasse des Treibstoffes. Zusätzlich nehmen wir an, dass der Treibstoff mit konstanter Rate verbrennt wird, also $dm/dt = v_f = \text{const.}$. Integrieren Sie die obige Bewegungsgleichung und bestimmen Sie $v = v(t\,; m_e,\, m_0,\, v_f,\, v_g,\, g)$.

Solution: Da $dm/dt = v_f = \text{const.} < 0$, gilt für die Masse der Rakete $m(t) = m_0 + v_f t = m_e + m_f + v_f t$. Wir sehen, dass zu einer Zeit $t_f = -\frac{m_f}{v_f} > 0$ die Rakete keinen Treibstoff mehr hat. Wir bestimmen die Abhängigkeit der Raketengeschwindigkeit von seiner Masse $v(m) = v(m(t)$, mit der Bedingung, dass $v(m_0) = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= -v_g\frac{dm}{dt} - mg \\
m\frac{dv}{dm}\frac{dm}{dt} &= -v_g\frac{dm}{dt} - mg \\
\frac{dv}{dm}v_f &= -\frac{v_g}{m}v_f - g \\
\frac{dv}{dm} &= -\frac{v_g}{m} - \frac{g}{v_f} \\
\frac{dv}{dm} &= -\frac{v_g}{m} - \frac{g}{v_f} \\
dv &= -\frac{v_g}{m}dm + \frac{g}{c}dm \\
\int_{v_0=0}^{v(m)} dv &= -v_g\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} - \frac{g}{v_f}\int_{m_0}^{m} 1dm \\
v(m) &= -v_g\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) - \frac{g}{v_f}(m - m_0).
\end{aligned}$$

Setzen wir $m(t)$ ein, haben wir explizit

$$v(t) = -v_g\ln\left(1 + \frac{v_f}{m_0}t\right) - \frac{g}{v_f}(m - m_0).$$

Zum Zeitpunkt, an dem die Rakete keinen Treibstoff mehr hat soll gelten

$$v_{\text{escape}} = v(m_e) = -v_g\ln\frac{m_e}{m_0} - \frac{g}{v_f}(m_e - m_0) \tag{0.6}$$

d) Nehmen wir an, die Rakete sei anfänglich in Ruhe, dass $v_g = 2.07$ km/s, und dass die Rakete ein Sechzigstel seiner anfänglichen Treibstoffmasse pro Sekunde verbrennt. Zeigen Sie, dass unter diesen Bedingungen, ein Gewichtsverhältnis von $m_f/m_e \approx 300$ notwendig ist, damit die Rakete ihre Fluchtgeschwindigkeit erreichen kann.

Solution: Wir stellen die obige Gleichung um:

$$\begin{aligned}
v_{\text{escape}} &= -v_g\ln\frac{m_e}{m_0} - \frac{g}{v_f}(m_e - m_0) \\
&= -v_g\ln\frac{m_e}{m_0} + 60g\frac{m_e - m_0}{m_0} \\
&= v_g\ln\frac{m_0}{m_e} + 60g\frac{m_f}{m_0}.
\end{aligned} \tag{0.7}$$

Nun nehmen wir an, dass $m_e \ll m_f$ gilt, womit wir $m_0 \approx m_f$ approximieren können. Dies gibt

$$\begin{aligned}
v_{\text{escape}} &\approx \ln\frac{m_f}{m_e} + 60g\frac{m_f}{m_f} \\
&\vdots \\
\frac{m_f}{m_e} &\approx \exp\left(\frac{v_{\text{escape}} + 60g}{v_g}\right)
\end{aligned} \tag{0.8}$$

Setzen wir alle numerischen Werte ein, finden wir $m_f/m_e \approx 296$.

Bemerkung: Wir können die Gleichungen auch ohne die Annahme, dass $m_f \ll m_e$ gilt, und die benutzten Approximationen lösen. Tun wir das, sehen wir dass exakt $m_f/m_e \leq 296.37$ gelten muss, damit die Rakete ihre Fluchtgeschwindigkeit erreichen kann. Unter vernachlässigung aller anderer Faktoren gilt somit für Raketen: Je mehr Teibstoff und je leichter die Rakete, desto besser.

4. **Newton vs. Galilei vs. Aristoteles** [2 Punkte]

   Die moderne Formulierung von Bewegungsgleichungen beginnt mit Newton. Gedanken über freien Fall haben sich Menschen allerdings schon viel früher gemacht. Z.B. kam der griechische Philosoph Aristoteles zu dem naheliegenden Prinzip das schwere Objekte schneller fallen als leichte. Dem widersprach der Astronom Galilei und erdachte das folgende Gedankenexperiment:

   Betrachte zwei Objekte A und B, wobei A schwerer ist als B. Kleben wir nun beide Objekte zusammen, so müsste A den Fall von B bremsen, gleichzeitig is das kombinierte Objekt aber schwerer als B und müsste nach unserer Annahme schneller fallen, was zum Widerspruch führt.

   Welche versteckte Annahme macht Galilei in seiner Argumentation? Was macht Gravitation so besonders?

Solution: Die wesentliche versteckte Annahme ist die Gleichheit von träger Masse und schwerer Masse, also das sogenannte *Äquivalenzprinzip*. Diese Annahme wird auch von Newton schon impizit gemacht, sie ist allerdings keineswegs so unschuldig wie es für Newton den Anschein gehabt haben mag. Tatsächlich ist die Gravitation die einzige Kraft, in der Ladung (schwere Masse) an die träge Masse gekoppelt ist. Ein Argument von der Art Galileis würde z.B. nicht für die elektrische Kraft funktionieren, obwohl diese eine sehr ähnliche Form hat. Der Grund ist, dass die elektrische Ladung eben unabhängig von der trägen Masse ist. Diese Eigenschaft ist so besonders, dass eine leicht verstärkte Variante des Äquivalenzprinzips Albert Einstein zu der Idee brachten, dass Gravitation überhaupt keine Kraft sein kann, sondern eine geometrische Erklärung benötigt. Damit legt das Äquivalenzprinzip den Grundstein für die allgemeine Relativitätstheorie. Heute noch wird das Äquivalenzprinzip mit großer Genauigkeit getestet in der Hoffnung leichte Verletzungen dieses festzustellen. Eine solche Verletzung scheint notwendig für viele Ansätze zur Quantisierung von Gravitation, aber das Äquivalenzprinzip ist hartnäckig und hält bisher allen Tests stand.