Freie Universität Berlin
**Analytische Mechanik**
Sommer-Semester 2020

**Übungsblatt 3**
**Rotationen und Kurven**

**Abgabe bis: 15.05.2020 um 12:00 Uhr**

---

1. **Gekoppelte Federn** [2+2+2+2+1+2=11]

   Der Hochenergiephyiker Sidney Coleman sagte: "*Die Karriere junger theoretischer Physiker besteht darin den harmonischen Oszillator in aufsteigenden Leveln der Abstraktion zu studieren*". Hier wollen wir mit dieser Reise beginnen.

   Betrachte zunächst ein Objekt mit Masse $m$ im Vakuum, dass durch eine Feder an einer Wand befestigt ist. Die Feder übt eine Kraft $F_\mathrm{F} = -kx$ auf die Masse aus, wobei $x$ den Ort des Objekts bezeichnet und $k$ die Federkonstante genannt wird.

   a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und finden Sie die allgemeine Lösung.

   Etwas komplexere Dynamik finden wir, wenn man zwei Objekte mit gleicher Masse $m$ betrachtet. Diese Massen sind je mit einer von zwei gegenüberliegenden Wänden durch eine Feder mit Federkonstante $K$ verbunden. Zusätzlich sind beide durch eine Feder mit Stärke $k$ miteinander verbunden.

   b) Welche Kräfte wirken auf die beiden Massen? Schreiben sie die Bewegungsgleichung mithilfe einer Matrix $M$ und einem Vektor $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2)^\mathrm{T}$ in der Form

   $$\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}. \tag{0.1}$$

   c) Finden Sie eine orthogonale Matrix (Rotationsmatrix) $R$ und eine diagonale Matrix $D$, so dass $M = RDR^\mathrm{T}$.

   d) Nutzen Sie diese rotierte Eigenbasis um die Bewegungsgleichung allgemein zu lösen.

   e) Was passiert mit der Lösung im Limes $k \to \infty$ und was im Limes $K \to \infty$?

   f) In einem System seien $n$ Objekte durch Federn gekoppelt, so dass sich die Bewegungsgleichung als $\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}$ für eine symmetrische $n \times n$ Matrix $M$ schreiben lässt. Welche physikalische Interpretation haben die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M$?

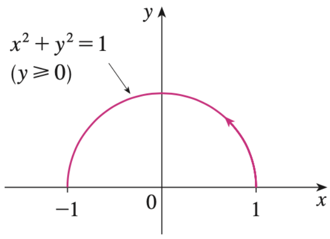
2. **Anwendungen von Kurvenintegralen** [3 + 4 + 1 + 1 + 1 + 3 + 1 + 1 = 15 Punkte]

   Wir betrachten einen dünnen Draht, der zu einem Halbkreis gebogen wurde, sodass er die obere Hälfte eines Einheitskreises nachbildet.

   a) Die Dichte des Drahtes am Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei durch die skalare Funktion $\rho(x, y) = 2 + x^2 y$ beschrieben. Berechnen Sie die Masse des Drahtes

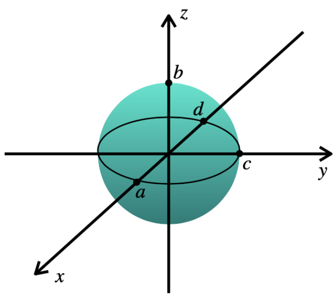
   b) Gegeben eine skalare Dichtefunktion $\rho(x, y)$ liegt der *Schwerpunkt* des Drahtes am Punkt $(x', y')$ mit

   $$x' = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x, y)ds, \qquad y' = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x, y)ds.$$




Hierbei ist $C$ die Kurve, auf der der Draht liegt, und $m$ die Gesamtmasse des Drahtes. Wir nehmen nun an, dass die Dichte des Drahtes proportional zum Abstand von der Linie $y = 1$ ist, d.h. $\rho(x, y) = k(1 - y)$. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Drahtes unter dieser Annahme.

Wir betrachten nun eine um den Koordinatenursprung zentrierte Sphäre mit Radius $r$, wie im folgenden Bild gezeigt.




Die Koordinaten der vier Punkte $a, b, c$ und $d$ sind gegeben durch:

$$a = (r, 0, 0), \qquad b = (0, 0, r), \qquad c = (0, r, 0), \qquad d = (-r, 0, -0)$$

c) Geben Sie eine Paramterisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt $a$ nach Punkt $b$ an. In anderen Worten: Berechnen Sie eine Funktion $r(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$, sowie Werte $t_1$ und $t_2$, sodass $a = r(t_1)$, $b = r(t_2)$ und für alle $t_1 \leq t \leq t_2$ der Punkt $r(t)$ auf der Sphäre liegt.

d) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt $b$ nach Punkt $c$ an.

e) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt $c$ nach Punkt $d$ an.

f) Betrachten Sie nun ein Teilchen, das sich nur auf der Oberfläche der Sphäre bewegen kann und berechnen Sie die von einem Kraftfeld $F(x, y, z) = (x^2, y^2, -xz)$ verrichtete Arbeit, wenn es das Teilchen von Punkt $a$ nach Punkt $b$ bewegt.

In den beiden folgenden Aufgaben betrachten wir das Kraftfeld

$$F(x, y, z) = \left( \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \qquad (0.2)$$

g) Das Kraftfeld $F(x, y, z)$ ist ein konservatives Kraftfeld, d.h. es existiert eine skalare Funktion $U(x, y, z)$ sodass $F(x, y, z) = \nabla U(x, y, z)$. Geben Sie $U(x, y, z)$ an. *(Hinweis: Sie sollten dieses Kraftfeld erkennen.)*

h) Berechnen Sie die vom Kraftfeld verrichtete Arbeit, wenn es ein Teilchen von Punkt $c$ nach Punkt $d$ entlang der Sphäre bewegt.