Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 4
Mathematisches Intermezzo und Planeten

Abgabe bis: 22.05.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Stokes Theorem** [2 + 5 + 2 + 5 = 14 Punkte]

   In einer früheren Aufgabe haben wir diverse Anwendungen von Linienintegralen – also Integralen entlang parametrisierter Kurven – kennen gelernt. In dieser Aufgabe werden wir das Konzept eines Oberflächenintegrals kennen lernen und eine wichtige und hilfreiche Korrespondenz zwischen bestimmten Kurven- und Linienintegralen entdecken. Um damit zu beginnen, müssen wir das Konzept einer parametrisierten Oberfläche einführen. Erinnern wir uns vorher daran, dass eine parametrisierte Kurve durch eine vektorwertige Funktion $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ beschrieben wird. Gegeben eine solche Funktion

   $$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

   ist die zugehörige Kurve gegeben durch die Menge aller Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sodass

   $$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

   für ein $t \in [a, b]$. Analog dazu ist eine *Fläche* beschrieben durch eine vektorwertige Funktion $r : D \to \mathbb{R}^3$ gegeben eine Region $D \subset \mathbb{R}^2$. Eine solche Funktion können wir ausrücken als

   $$(u, v) \in D \mapsto r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

   Die Menge aller Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sodass

   $$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

   für ein $(u, v) \in D$ gilt, heißt dann die Fläche S mit Parametrisierung r.

   a) Finden Sie eine Parametrisierung der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$: geben Sie eine Funktion $r : [0, u_1] \times [0, v_1] \to \mathbb{R}^3$ an, sowie die kleinsten Werte u_1 und v_1 für die die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ die korrespondierende Fläche ist.

   Nun da wir das Konzept einer Fläche kennen gelernt haben, können wir ein Flächenintegral einführen – die natürliche Verallgemeinerung von Linienintegralen. Wir werden uns direkt mit Flächenintegralen von Vektorfeldern beschäftigen. Gegeben ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ auf $\mathbb{R}^3$ definieren wir das Flächenintegral von $\mathbf{F}$ über die Fläche S als

   $$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (r_u \times r_v) dA \\ &= \iint_D \mathbf{F}(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) dudv \\ &= \iint_D \mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) dudv\end{aligned}$$

   wobei $r(u, v) = ((x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ auf dem Definitionsgebiet D die Parametrisierung von S ist und

   $$r_u := \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \right) \qquad r_v := \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \right)$$

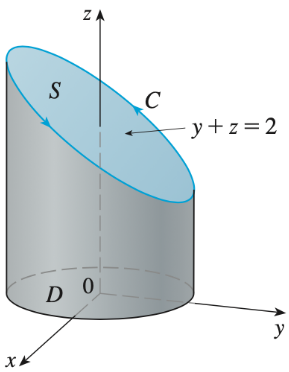
   Das Flächenintegral von $\mathbf{F}$ über S heißt auch der *Fluss* von $\mathbf{F}$ durch S.

b) Berechnen sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ durch die Einheitssphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Nun können wir endlich (eine vereinfachte Version) vom *Satz von Stokes* formulieren. Unter Vernachlässigung einiger Details sagt dieser Satz das folgende aus:
Satz (Satz von Stokes)**.** *Sei S eine Fläche, deren Rand die geschlossene Kurve C bildet. Dann gilt:*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Wie versprochen gibt uns der Satz von Stokes eine eindeutige Korrespondenz zwischen Linienintegralen von Vektorfeldern entlang geschlossener Kurfen, und dem Fluss der Rotation dieses Vektorfeldes durch die davon eingeschlossene Fläche. Dieser Satz wird sich als sehr hilfreich in Ihrer Karriere als Physiker*in herausstellen. In den beiden folgenden Aufgaben werden wir die in der Abbildung dargestellte Situtation betrachten.



c) Sei C die Kurve, die durch die Schnittmenge zwischen der Ebene $y + z = 2$ und dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ gegeben ist. Geben Sie eine Parametrisierung der von der Kurve C eingeschlossenen Fläche S an.

d) Verwenden Sie den Satz von Stokes, um das Linienintegral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ zu berechnen. Hierbei sei $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$.

2. **Taylorsche Formel in einer Dimension** [$4 + 4 = 8$ Punkte]

Was dem Zimmermann sein Latthammer, das ist dem Physiker des Öfteren die Taylorsche Formel. Die Taylorsche Formel erlaubt komplizierte Funktionaleabhängigkeiten durch einfache Polynome lokal zu approximieren und damit analytisch handhabbar zu machen. Der mathematische Satz ist der folgende:
Satz (Taylorsche Formel)**.** *Gegeben sei eine $(n+1)$-fach stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall D und ein Punkt $a \in D$. Es gilt*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_n(x)$$

wobei das Restglied die Darstellung besitzt:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Dabei sei auch $x < a$ erlaubt.

a) Beweisen Sie die Taylorsche Formel unter Verwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung sowie der Regel zur partiellen Integration. Falls erforderlich machen Sie sich erst mit der formalen Aussage der zuverwendenden Sätze vertraut. *Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach n.*

Der wesentliche und oft sträflich unterschlagene Teil des Satzes von Taylor ist die explizite Formel für das Restglied R_n. Dies ist aber eigentlich der Kern der Aussage, den man sich auch behalten sollte. Nur wenn man das Restglied geeignet beschränken kann, weiß man, dass eine Rechnung, welche Terme höherer Ordnung in der Potenzreihe vernachlässig, eine kontrollierte Approximation macht. In der Praxis erlauben andere Darstellungen des Restgliedes oft eine schnellere Abschätzung als die Integralform. Zwei gängige Darstellungen sind die folgenden:
Satz (Restglieddarstellungen)**.** *Für die Taylorsche Formel mit $a < x$ gilt weiterhin:*

i. Es existiert ein $\xi \in [a, x]$, sodass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a) \qquad \text{(Cauchy Restglied)}$$

ii. Es existiert ein $\xi' \in [a, x]$, sodass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad \text{(Lagrange Restglied)}$$

b) Beweisen Sie die Cauchy und Lagrange Formel für das Restglied R_n. *Hinweis: Zwischenwertsatz.*

Diese Werkzeuge werden wir in noch folgenden Aufgaben extensiv nutzen. *Fortsetzung folgt ...*

3. **Planetenbewegung** $[1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 11$ Punkte$]$

In dieser Aufgabe betrachen wir zwei Planeten mit unterschiedlichen Massen $m_1 \neq m_2$, und Koordinaten $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, die sich umeinander bewegen. Die Gesamtenergie des Systemes sei gegeben durch

$$E(\dot{\mathbf{r}_1}, \dot{\mathbf{r}_2}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}_1}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}_2}^2 + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \qquad U(r) = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{0.1}$$

a) Drücken Sie die Energie $E(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{R}, \mathbf{r})$ in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten mit Gesamtmasse M und Relativmasse μ aus:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tag{0.2}$$

$$M = m_1 + m_2, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{0.3}$$

Identifizieren Sie die entkoppelten Energieterme für Schwerpunkts- und Relativbewegung. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktskoordinate her und lösen Sie diese.

Im folgenden betrachten wir nur noch den Energieterm assoziert mit der Relativbewegung. Um die Relativbewegung besser verstehen zu können, führen wir eine Koordinatentransformation in Zylinderkoordinaten durch $(r_1, r_2, r_3) \mapsto (\rho, \phi, z)$. Zylinderkoordinaten formen ein orthonormales Koordinatensystem und sind über folgende Einheitsvektoren definiert

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \ \hat{\mathbf{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \ \hat{\mathbf{e}}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{0.4}$$

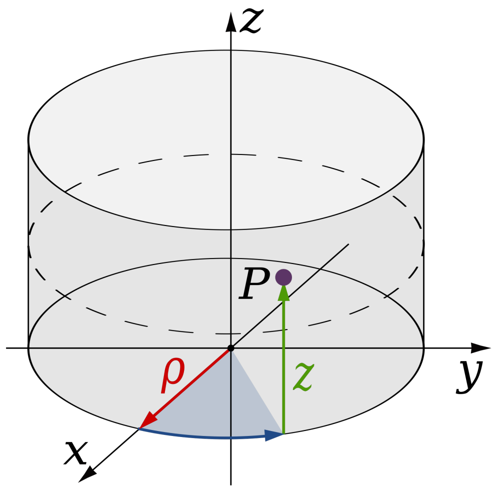


Abbildung 1: Zylinderkoordinaten.

so dass

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + z \hat{\mathbf{e}}_z. \tag{0.5}$$

Die Einheitsvektoren in diesem Koordinatensystem sind explizit nicht konstant.

b) Wie lautet die Energie für die Relativbewegung in diesem Koordinatensystem?

Wie wir sehen, ist die Energie der Relativbewegung unabhängig vom Winkel ϕ (aber nicht unabhängig von $\dot{\phi}$). Wie Sie später in der Vorlesung lernen werden, hat diese *Rotationssymmetrie* des Potentials zur Folge, dass der Drehimpuls des Systemes

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = const.$$

erhalten ist. Da damit auch die Richtung von $\mathbf{L}$ konstant ist, und der hergeleitete Energieterm der Relativbegegung unabhängig der Orientierung der $\hat{\mathbf{e}}_z$-Achse ist, wählen wir das Koordinatensystem so, dass die $\hat{e}_z$-Achse in Richtung des Drehimpulses zeigt, sodass $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{e}}_z$.

c) Begründen Sie, warum das nur dann zulässig ist, wenn $\mathbf{L} = const.$ gilt.

In diesem Koordinatensystem gilt $z(t) = 0$. Die Relativkoordinate bewegt sich in diesem neuen Koordinatensystem also nur in der $x - y$-Ebene.

d) Begründen Sie dies.

Da $\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \parallel \hat{\mathbf{e}}_z$,gilt $\mathbf{r} \perp \hat{\mathbf{e}}_z$.

e) Leiten Sie $L = L(\rho, \dot{\phi})$ her und setzen Sie $\dot{\phi} = \dot{\phi}(L)$ in den Energieausdruck der Relativbewegung ein. Identifizieren Sie den kinetischen- und Potentialterm der Relativbewegung in ρ und stellen sie die Bewegungsgleichung $\mu\ddot{\rho} =?$ auf.

   Hinweis: Finden Sie dafür zuerst heraus, wie der ∇-Operator in Zylinderkoordinaten aussieht.

f) Skizzieren Sie das Potential für $3L^2 > 2\gamma\mu M$. Nähern Sie das hergeleitete Potential in zweiter Ordnung Taylorentwicklung um einen sinnvollen Punkt und lösen Sie die Bewegungsgleichung in dieser Approximation.

g) Berechnen sie das Restglied der Approximation und damit den Korrekturterm zur radialen Kraft. Wann ist die Approximation am schlechtesten?

h) Welche Rolle spielt der Approximationsfehler hier? Welche Bedeutung hat die Form des Potentials für Satellitenbewegungen um die Erde? Welcher Kraft entspricht es?