

Übungsblatt 4
Mathematisches Intermezzo und Planeten

Abgabe bis: 22.05.2020 um 12:00 Uhr

1. **Stokes Theorem** [2 + 5 + 2 + 5 = 14 Punkte]

In einer früheren Aufgabe haben wir diverse Anwendungen von Linienintegralen – also Integralen entlang parametrisierter Kurven – kennen gelernt. In dieser Aufgabe werden wir das Konzept eines Oberflächenintegrals kennen lernen und eine wichtige und hilfreiche Korrespondenz zwischen bestimmten Kurven- und Linienintegralen entdecken. Um damit zu beginnen, müssen wir das Konzept einer parametrisierten Oberfläche einführen. Erinnern wir uns vorher daran, dass eine parametrisierte Kurve durch eine vektorwertige Funktion $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschrieben wird. Gegeben eine solche Funktion

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

ist die zugehörige Kurve gegeben durch die Menge aller Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sodass

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

für ein $t \in [a, b]$. Analog dazu ist eine *Fläche* beschrieben durch eine vektorwertige Funktion $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben eine Region $D \subset \mathbb{R}^2$. Eine solche Funktion können wir ausdrücken als

$$(u, v) \in D \mapsto r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Die Menge aller Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sodass

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

für ein $(u, v) \in D$ gilt, heißt dann die Fläche S mit Parametrisierung r .

- a) Finden Sie eine Parametrisierung der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$: geben Sie eine Funktion $r : [0, u_1] \times [0, v_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ an, sowie die kleinsten Werte u_1 und v_1 für die die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ die korrespondierende Fläche ist.

Lösung: Am einfachsten können wir eine Kugel natürlich in Kugelkoordinaten parametrisieren, also als

$$r(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$

wobei $0 \leq \phi \leq \pi$ und $0 \leq \theta \leq 2\pi$ - d.h. $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Nun da wir das Konzept einer Fläche kennen gelernt haben, können wir ein Flächenintegral einführen – die natürliche Verallgemeinerung von Linienintegralen. Wir werden uns direkt mit Flächenintegralen von Vektorfeldern beschäftigen. Gegeben ein Vektorfeld \mathbf{F} auf \mathbb{R}^3 definieren wir das Flächenintegral von \mathbf{F} über die Fläche S als

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (r_u \times r_v) dA \\ &= \iint_D \mathbf{F}(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) dudv \\ &= \iint_D \mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) dudv \end{aligned}$$

wobei $r(u, v) = ((x(u, v), y(u, v), z(u, v)))$ auf dem Definitionsgebiet D die Parametrisierung von S ist und

$$r_u := \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \right) \quad r_v := \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \right)$$

Das Flächenintegral von \mathbf{F} über S heißt auch der *Fluss* von \mathbf{F} durch S .

- b) Berechnen sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ durch die Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lösung: Wir verwenden die Parametrisierung

$$r(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$

wobei $0 \leq \phi \leq \pi$ und $0 \leq \theta \leq 2\pi$. In dieser Darstellung können wir die Kraft ausdrücken als

$$\mathbf{F}(r(\phi, \theta)) = (\cos \phi, \sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta).$$

Außerdem gilt

$$r_\phi \times r_\theta = (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi),$$

woraus folgt, dass

$$\mathbf{F}(r(\phi, \theta)) \cdot (r_\phi \times r_\theta) = \cos \phi \sin^2 \phi \cos \theta + \sin^3 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta.$$

Also ist der Fluss von \mathbf{F} durch S

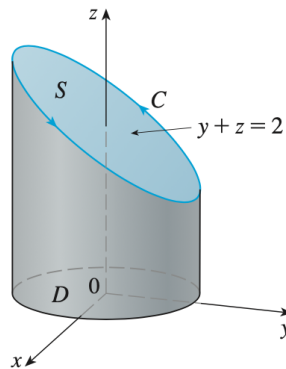
$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (r_\phi \times r_\theta) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \sin^3 \phi \sin^2 \theta) d\phi d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \sin^2 \phi \cos \phi d\phi \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= 0 + \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Nun können wir endlich (eine vereinfachte Version) vom *Satz von Stokes* formulieren. Unter Vernachlässigung einiger Details sagt dieser Satz das folgende aus:

Satz (Satz von Stokes). *Sei S eine Fläche, deren Rand die geschlossene Kurve C bildet. Dann gilt:*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Wie versprochen gibt uns der Satz von Stokes eine eindeutige Korrespondenz zwischen Linienintegralen von Vektorfeldern entlang geschlossener Kurven, und dem Fluss der Rotation dieses Vektorfeldes durch die davon eingeschlossene Fläche. Dieser Satz wird sich als sehr hilfreich in Ihrer Karriere als Physiker*in herausstellen. In den beiden folgenden Aufgaben werden wir die in der Abbildung dargestellte Situation betrachten.



- c) Sei C die Kurve, die durch die Schnittmenge zwischen der Ebene $y + z = 2$ und dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ gegeben ist. Geben Sie eine Parametrisierung der von der Kurve C eingeschlossenen Fläche S an.

Lösung: Die Kurve ist durch die Menge der Punkte $(x, y, 2 - y)$ mit $x^2 + y^2 \leq 1$ gegeben. Damit ist eine geeignete Parametrisierung

$$r(\alpha, \theta) = (\alpha \cos \theta, \alpha \sin \theta, 2 - \alpha \sin \theta) \quad (0.1)$$

für $0 \leq \alpha \leq 1$ und $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- d) Verwenden Sie den Satz von Stokes, um das Linienintegral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ zu berechnen. Hierbei sei $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$.

Lösung: Der Satz von Stokes besagt, dass

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

und wir haben schon gesehen, dass

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F})(r(\alpha, \theta)) \cdot (r_\alpha \times r_\theta) d\alpha d\theta.$$

Wir beginnen also damit, die Rotation von \mathbf{F} zu berechnen:

$$\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 1 + 2y).$$

Nun berechnen wir r_α und r_θ . Verwenden wir die Parametrisierung $r(\alpha, \theta)$ aus der vorigen Aufgabe, erhalten wir

$$\begin{aligned} r_\alpha &= (\cos \theta, \sin \theta, -\sin \theta) \\ r_\theta &= (-\alpha \sin \theta, \alpha \cos \theta, -\alpha \cos \theta), \end{aligned}$$

und damit auch

$$r_\alpha \times r_\theta = (0, \alpha \sin^2 \theta - \alpha \cos^2 \theta, \alpha)$$

und

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{F})(r(\alpha, \theta)) \cdot (r_\alpha \times r_\theta) &= (0, 0, 1 + 2\alpha \sin \theta) \cdot (0, \sin^2 \theta - \cos^2 \theta, 1) \\ &= \alpha(1 + 2\alpha \sin \theta). \end{aligned} \quad (0.2)$$

Nun können wir das Integral auswerten:

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{F})(r(\alpha, \theta)) \cdot (r_\alpha \times r_\theta) d\alpha d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \alpha(1 + 2\alpha \sin \theta) d\alpha d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\alpha^2}{2} + 2\frac{\alpha^3 \sin \theta}{3} \right]_0^1 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

2. Taylorsche Formel in einer Dimension [4 + 4 = 8 Punkte]

Was dem Zimmermann sein Latthammer, das ist dem Physiker des Öfteren die Taylorsche Formel. Die Taylorsche Formel erlaubt komplizierte Funktionaleabhängigkeiten durch einfache Polynome lokal zu approximieren und damit analytisch handhabbar zu machen. Der mathematische Satz ist der folgende:

Satz (Taylorsche Formel). *Gegeben sei eine $(n+1)$ -fach stetig differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall D und ein Punkt $a \in D$. Es gilt*

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$

wobei das Restglied die Darstellung besitzt:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Dabei sei auch $x < a$ erlaubt.

- a) Beweisen Sie die Taylorsche Formel unter Verwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung sowie der Regel zur partiellen Integration. Falls erforderlich machen Sie sich erst mit der formalen Aussage der zuverwendenden Sätze vertraut. *Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach n .*

Lösung: Die Taylorsche Formel folgt fast unmittelbar aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine differenzierbare Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit Ableitung $F' = f$ heißt *Stammfunktion von f* .

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei D ein Intervall, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in D$ ein beliebiger Punkt. Die Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

ist eine Stammfunktion von f .

Als Korollar erhält des Satzes erhält man sofort die Formulierung:

Korollar. Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung f' . Dann gilt für $a, b \in D$

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

(Es eine schöne kleine Übung zu zeigen, dass der Hauptsatz das Korollar tatsächlich impliziert. Ebenso wenn sie den Hauptsatz noch niemals selbst formal bewiesen haben, ist auch dies eine gute Übung. Um den Hauptsatz zu beweisen, zeigt man am Besten erst den unten angegebenen Zwischenwertsatz.) Hier sind wir aber an der Taylorschen Formel interessiert und nehmen die Gültigkeit der anderen Sätze zur Annahme.

Beweis der Taylorschen Formel. Wir führen den Beweis per Induktion nach n .

Induktionsanfang: Für $n = 0$ besagt die Taylorsche Formel

$$f(x) = f(a) + R_0(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Dies ist korrekt gemäß des Korollars des Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

Induktionsschritt: Mit Hilfe der partiellen Integration finden wir

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt = (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Dies ist der notwendige Induktionsschritt, womit die Taylorsche Formel bewiesen ist. \square

Der wesentliche und oft sträflich unterschlagene Teil des Satzes von Taylor ist die explizite Formel für das Restglied R_n . Dies ist aber eigentlich der Kern der Aussage, den man sich auch behalten sollte. Nur wenn man das Restglied geeignet beschränken kann, weiß man, dass eine Rechnung, welche Terme höherer Ordnung in der Potenzreihe vernachlässigt, eine kontrollierte Approximation macht. In der Praxis erlauben andere Darstellungen des Restgliedes oft eine schnellere Abschätzung als die Integralform. Zwei gängige Darstellungen sind die folgenden:

Satz (Restglieddarstellungen). Für die Taylorsche Formel mit $a < x$ gilt weiterhin:

i. Es existiert ein $\xi \in [a, x]$, sodass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a) \quad (\text{Cauchy Restglied})$$

ii. Es existiert ein $\xi' \in [a, x]$, sodass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi')}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \quad (\text{Lagrange Restglied})$$

b) Beweisen Sie die Cauchy und Lagrange Formel für das Restglied R_n . *Hinweis: Zwischenwertsatz.*

Lösung: Der Zwischenwertsatz besagt:

Satz (Zwischenwertsatz). Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in D$, $a < b$ zwei Punkte, sodass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert eine Nullstelle ξ von f zwischen a und b .

Mit dem Zwischenwertsatz kann man sofort den Mittelwertsatz der Integralrechnung in seiner erweiterten Form beweisen:

Satz (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, ein Intervall. Weiterhin sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $g \geq 0$. Es gibt eine Zwischenstelle ξ mit $a \leq \xi \leq b$ sodass*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Sei $M = \max f([a, b])$ and $m = \min f([a, b])$. (Diese existieren nach dem Satz vom Minimum und Maximum für stetige Funktionen.) Nun gilt

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Wir definieren $y_0 = G^{-1} \int_a^b f(x)g(x)dx$ mit G und wissen nun, dass $m \leq y_0 \leq M$. Wir betrachten nun die Funktion $h(x) = f(x) - y_0$ und nennen x_M und x_m zwei Stellen wo f den Wert M beziehungsweise m annimmt. O.B.d.A. sei $x_m \leq x_M$ ansonsten betrachten wir $-h$ anstelle von h . Wenn x_M und x_m selbst keine Nullstellen von h so ist $h(x_M) > 0$ und $h(x_m) < 0$. Dann existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle ξ zwischen x_M und x_m . Somit haben wir gezeigt, dass in jedem Falle eine Nullstelle ξ von h in $[a, b]$ existiert und an dieser gilt

$$G^{-1} \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi),$$

woraus sich die Aussage des Satzes sofort ergibt. □

Beweis der Restglieddarstellung. Für das Cauchy Restglied wenden wir den erweiterten Zwischenwertsatz mit $g(x) = 1$ an. Das heißt das 'f' des Zwischenwertsatzes ist der gesamte Integrand. Somit existiert ein $\xi \in [a, x]$, sodass

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) (\xi - t)^n \int_a^x 1dt \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) (\xi - t)^n (x - a). \end{aligned}$$

Für das Lagrange Restglied wählen wir $g(x) = (x - t)^n$, dann ergibt sich die Existenz von $\xi' \in [a, x]$, sodass

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi') \int_a^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi') (x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Diese Werkzeuge werden wir in noch folgenden Aufgaben extensiv nutzen. *Fortsetzung folgt ...*

3. Planetenbewegung [1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 11 Punkte]

In dieser Aufgabe betrachten wir zwei Planeten mit unterschiedlichen Massen $m_1 \neq m_2$, und Koordinaten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, die sich umeinander bewegen. Die Gesamtenergie des Systemes sei gegeben durch

$$E(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (0.3)$$

- a) Drücken Sie die Energie $E(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{R}, \mathbf{r})$ in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten mit Gesamtmasse M und Relativmasse μ aus:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (0.4)$$

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (0.5)$$

Identifizieren Sie die entkoppelten Energieterme für Schwerpunkts- und Relativbewegung. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktskoordinate her und lösen Sie diese.

Lösung: Durch Einsetzen sehen wir dass

$$E = \underbrace{\frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2}_{E_s(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R})} + \underbrace{\frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + U(|\mathbf{r}|)}_{E_r(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})}$$

gilt. Wir identifizieren, dass der Schwerpunktsterm nur einen Beitrag aus der kinetischen Energie erhält und keine potentielle Energie aufweist. Damit bewegt sich der Schwerpunkt frei mit

$$M \ddot{\mathbf{R}} = 0. \quad (0.6)$$

Damit haben wir $R(t) = At + B$.

Im folgenden betrachten wir nur noch den Energieterm assoziiert mit der Relativbewegung. Um die Relativbewegung besser verstehen zu können, führen wir eine Koordinatentransformation in Zylinderkoordinaten durch $(r_1, r_2, r_3) \mapsto (\rho, \phi, z)$. Zylinderkoordinaten formen ein orthonormales Koordinatensystem und sind über folgende Einheitsvektoren definiert

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (0.7)$$

so dass

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + z \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (0.8)$$

Die Einheitsvektoren in diesem Koordinatensystem sind explizit nicht konstant.

- b) Wie lautet die Energie für die Relativbewegung in diesem Koordinatensystem?

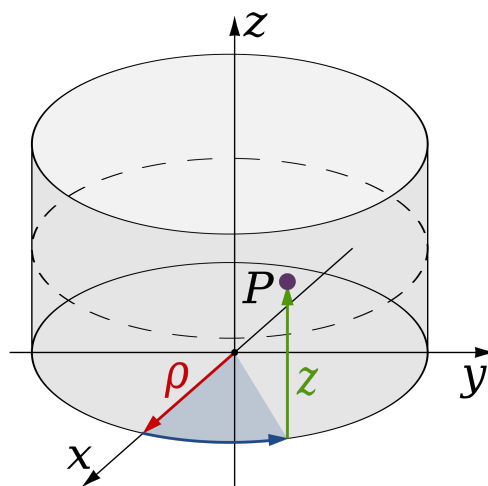


Abbildung 1: Zylinderkoordinaten.

Lösung: Wir haben

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + z \hat{\mathbf{e}}_z, \quad |\mathbf{r}|^2 = \rho^2 + z^2 \quad (0.9)$$

und

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \underbrace{\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\rho}_{\dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi} + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (0.10)$$

Die Einheitsvektoren sind orthogonal, womit wir

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

erhalten und damit

$$E_r = \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + U(\sqrt{\rho^2 + z^2}).$$

Wie wir sehen, ist die Energie der Relativbewegung unabhängig vom Winkel ϕ (aber nicht unabhängig von $\dot{\phi}$). Wie Sie später in der Vorlesung lernen werden, hat diese *Rotationssymmetrie* des Potentials zur Folge, dass der Drehimpuls des Systemes

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.}$$

erhalten ist. Da damit auch die Richtung von \mathbf{L} konstant ist, und der hergeleitete Energieterm der Relativbewegung unabhängig der Orientierung der $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Achse ist, wählen wir das Koordinatensystem so, dass die $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Achse in Richtung des Drehimpulses zeigt, sodass $\mathbf{L} = L \hat{\mathbf{e}}_z$.

c) Begründen Sie, warum das nur dann zulässig ist, wenn $\mathbf{L} = \text{const.}$ gilt.

Lösung: Weil das neue Koordinatensystem ansonsten kein Inertialsystem ist.

In diesem Koordinatensystem gilt $z(t) = 0$. Die Relativkoordinate bewegt sich in diesem neuen Koordinatensystem also nur in der $x - y$ -Ebene.

d) Begründen Sie dies.

Da $\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \parallel \hat{\mathbf{e}}_z$, gilt $\mathbf{r} \perp \hat{\mathbf{e}}_z$.

e) Leiten Sie $L = L(\rho, \dot{\phi})$ her und setzen Sie $\dot{\phi} = \dot{\phi}(L)$ in den Energieausdruck der Relativbewegung ein. Identifizieren Sie den kinetischen- und Potentialterm der Relativbewegung in ρ und stellen sie die Bewegungsgleichung $\mu \ddot{\rho} = ?$ auf.

Hinweis: Finden Sie dafür zuerst heraus, wie der ∇ -Operator in Zylinderkoordinaten aussieht.

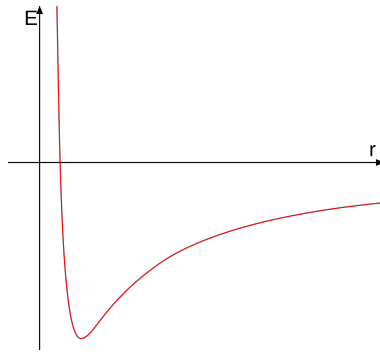


Abbildung 2: Effektives Potential. Wir sehen ein Potentialminimum bei $\bar{\rho}$.

Lösung: Mit $z = 0$ leiten wir her

$$\mathbf{L} = \mu\rho^2\dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_z = L\hat{\mathbf{e}}_z.$$

Damit ergibt sich die Energie assoziiert mit der Relativbewegung zu

$$E_r = \underbrace{\frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2}_{E_{r,kin}(\dot{\rho})} + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho)}_{V_{r,eff.}(\rho)}.$$

Wir identifizieren das effektive Potential

$$V_{r,eff.}(\rho) = \frac{l^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\gamma\mu M}{\rho}.$$

Mit dem ∇ -Operator in Zylinderkoordinaten

$$\nabla f(\rho, \phi, z) = \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} f + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

erhalten wir

$$\mu\ddot{\rho} = \frac{l^2}{\mu\rho^3} - \frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} = \frac{l^2}{\mu\rho^3} - \gamma\mu M \frac{1}{\rho^2}.$$

- f) Skizzieren Sie das Potential für $3L^2 > 2\gamma\mu M$. Nähern Sie das hergeleitete Potential in zweiter Ordnung Taylorentwicklung um einen sinnvollen Punkt und lösen Sie die Bewegungsgleichung in dieser Approximation.

Lösung: Wir sehen, dass $0 = \frac{\partial V_{r,eff.}(\rho)}{\partial \rho}$ gelöst ist für $\rho = \bar{\rho} = \frac{L^2}{\gamma\mu^2 M}$. In zweiter Ordnung Taylor-Entwicklung ergibt das für das Potential

$$V_{r,eff.}(\rho) = V(\bar{\rho}) + \underbrace{\frac{1}{2\bar{\rho}^3} \left[\frac{3L^2}{\mu\bar{\rho}} - 2\gamma\mu M \right]}_c (\rho - \bar{\rho})^2 + O((\rho - \bar{\rho})^4),$$

und damit haben wir im Potentialminimum mit $x = \rho - \bar{\rho}$ eine Bewegungsgleichung

$$\mu\ddot{x} = -c \frac{\partial}{\partial x} x^2 = -2cx.$$

Die allgemeine Lösung dieser Bewegungsgleichung ist gegeben durch

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{2c}{\mu}}.$$

- g) Berechnen sie das Restglied der Approximation und damit den Korrekturterm zur radialen Kraft. Wann ist die Approximation am schlechtesten?

Lösung: Setzen wir in die Integralform des Restgliedes ein, erhalten wir

$$R_2^V(\rho) = 24 \frac{l^2}{\mu} \rho^2 (\rho^{-4} - \bar{\rho}^{-4}) - 9(\mu M \rho + 4 \frac{l^2}{\mu}) (\rho^{-3} - \bar{\rho}^{-3}) \rho \\ + 12(\rho \mu M + \frac{L^2}{\mu}) (\rho^{-2} - \bar{\rho}^{-2}) - 3\mu M (\rho^{-1} - \bar{\rho}^{-1}).$$

Der Korrekturterm zur Kraft ist gegeben durch

$$\frac{\partial R_2^V(\rho)}{\partial \rho}.$$

Die Approximation ist also am schlechtesten wenn $\rho, \bar{\rho}$ sehr klein ist oder ρ sehr groß wird.

- h) Welche Rolle spielt der Approximationsfehler hier? Welche Bedeutung hat die Form des Potentials für Satellitenbewegungen um die Erde? Welcher Kraft entspricht es?

Lösung: Die Form des Potentials garantiert für $\bar{\rho} > 0$ eine stabile Umlaufbahn für Satelliten um die Erde - in der Bewegungsgleichung führt der Approximationsfehler zu einem Korrekturterm $O(x^2)$, sodass für hinreichend kleine Abweichungen von der Umlaufbahn $x \ll 1$, die Approximation gut ist und insbesondere kleine Abweichungen in radialer Geschwindigkeit und Position den Satelliten nicht aus dem Orbit werfen - der Orbit ist also zu Ordnung $O(x^2)$ Fehlertolerant. Aus der Perspektive des Satelliten wirkt der zusätzliche Potentialterm als Zentrifugalkraft - Das Ruhesystem eines die Erde umlaufenden Satelliten ist kein Inertialsystem, sodass die Zentrifugalkraft als *Scheinkraft* auftritt.