Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 5
Phasenräume und Transformationssätze

Abgabe bis: 29.05.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Phasenräume** $[a1 + b2 + c1 + d1 + e1 + f2 + g1 + h2 + i1 + j2 + k1 = 15 \text{ Punkte}]$

   Der Phasenraum bietet die Möglichkeit, komplexe Dynamiken auf eine einfache Art und Weise zu visualisieren, ohne dass dafür die vollständige Bewegungsgleichung gelöst werden muss. Zudem wird die Idee das Phasenraumes zentral sein für den Hamiltonformalismus, den wir später in der Vorlesung kennen lernen werden.

   In dieser Aufgabe wollen wir uns näher mit dem Phasenraum vertraut machen, verschiedene Bewegungen visualisieren und einige wichtige Eigenschaften des Phasenraumes herleiten. Zur Erinnerung: Der Phasenraum eines n-Teilchensystems im dreidimensionalen Raum ist gegeben durch den Vektorraum $\mathbb{R}^{6n}$ und ein Element in diesem Phasenraum ist ein Vektor $(\boldsymbol{x}_1^T, \ldots, \boldsymbol{x}_n^T, \boldsymbol{p}_1^T, \ldots, \boldsymbol{p}_n^T)^T$, wobei $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^3$ für $i = 1, \ldots, n$ die Orts- und Impulsvektoren der n Teilchen sind.

   Begnügen wir uns zunächst einmal mit einem einzigen Teilchen in einer Dimension. Dieses Teilchen habe eine Masse m und mit einer Feder mit Federkonstante k mit einer festen Wand verbunden. Die Bewegung sei reibungsfrei. Die Auslenkung aus der Gleichgewichtsposition bezeichnen wir mit x und den Impuls des Teilchens mit p.

   a) Was ist die Gesamtenergie des Teilchens als Funktion von x und p? Ist dies eine Erhaltungsgröße?

   Lösung: Das die Rückstellkraft der Feder eine konservative Kraft ist, ist die Gesamtenergie des Teilchens eine Erhaltungsgröße und wir können sie berechnen als Summe der kinetischen und der potentiellen Energie als $E = T + U$. Die potentielle Energie der Feder ist gegeben durch $U(x) = -\int_x (-kx) = kx^2/2$. Wir erhalten dann

   $$E = T + U = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}x^2 \tag{0.1}$$

   .

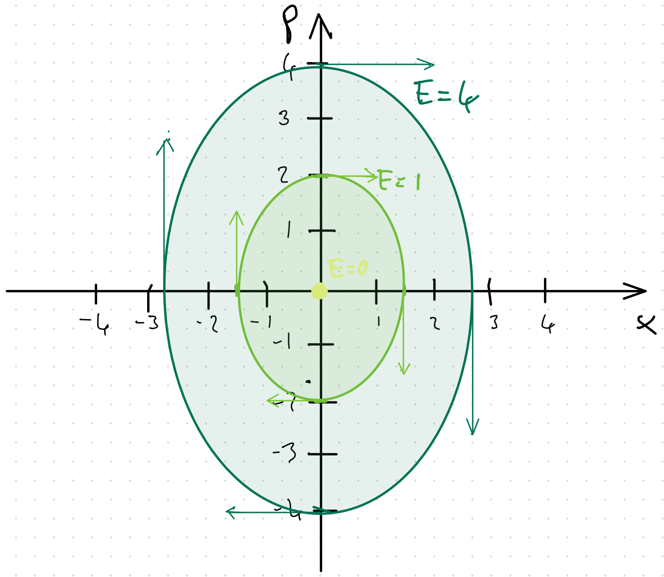
   Verschiedene Gesamtenergien E definieren nun Orbiten im Phasenraum, auf denen das Teilchen sich bewegen kann.

   b) Skizzieren sie diese Orbiten im Phasenraum für verschiedene Werte von $E = 0, 1, 4$ unter der Annahme, dass $k = 1$ und $m = 2$ gilt.

   Lösung: Wir erkennen sofort, dass Gleichung (0.1) eine Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{2mE}$ und $\sqrt{2E/k}$ definiert. Wir können die Orbiten dann ausdrücken als

   $$p(x) = \pm\sqrt{2m(E - U(x))} \tag{0.2}$$
   $$= \pm\sqrt{2m(E - kx^2/2)} \tag{0.3}$$

   und erhalten folgendes Bild:



Nun wollen wir die Bewegungsrichtung und -geschwindigkeit auf diesen Orbiten berechnen. Diese können wir als Tangentialvektoren an den Orbiten visualisieren.

c) Stellen Sie dazu die Bewegungsgleichung des Phasenraumvektors $(x, p)^T$ auf und geben Sie das resultierende *Geschwindigkeitsfeld* $\boldsymbol{f}(x, p) \in \mathbb{R}^2$ an.

Lösung: Die Bewegungsgleichung des Phasenraumvektors ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ m\ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -kx \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

d) Zeichnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren an den Punkten der Orbiten, für die entweder $x = 0$ oder $p = 0$ gilt, in die Skizze aus Aufgabe 1b ein.

Lösung: s. Skizze aus Aufgabe 1b.

Wir bezeichnen Punkte im Phasenraum, für die $\boldsymbol{f}(x, p) = (0, 0)^T$ gilt, als *Fixpunkte* der Bewegung.

e) Welche Fixpunkte hat die Bewegung des Pendels? **Lösung:** Es gibt natürlich nur einen Fixpunkt, nämlich $(x, p) = (0, 0)$.

Die Annahme, dass das Teilchen sich reibungsfrei bewegt, ist natürlich eine starke Idealisierung. In der Realität wirkt zusätzlich zur Rückstellkraft der Feder noch eine Reibungskraft die Proportional zur Geschwindikgeit des Teilchens mit Proportionalitätskonstante μ wirkt. Allgemein können wir die Bewegungsgleichung eines Teilchens also schreiben als

$$m\ddot{x} = F(x, p).$$

und in diesem Fall ist $F(x,p) = -kx - \eta\dot{x}$. Die Bewegungsgleichung ist nun deutlich komplizierter geworden. Mithilfe des Phasenraums können wir trotzdem auf eine einfache Art und Weise die Bewegungsform visualisieren. Dazu eliminieren wir die Abhängigkeit von der Zeit.

f) Zeigen Sie, dass die 'Steigung' der Orbiten für $p \neq 0$ durch die folgende Relation gegeben ist

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{mF(x,p)}{p},$$

Lösung: Wir eliminieren t:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} = F(x,p)\left(\frac{p}{m}\right)^{-1}. \tag{0.5}$$

Allgemein können wir diese Relation nun dazu verwenden, sogenannte *Isoklinen* zu bestimmen. Isoklinen sind Punkteschare im Phasenraum mit konstanter Steigung, also alle Punkte (x', p') an denen die $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = \alpha$ für eine Konstante α.

g) Berechnen Sie die Isoklinen des gedämpften harmonischen Oszillators, den wir hier betrachten?

Lösung: Wir setzen $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = \alpha$ für $F(x,p) = -kx - \eta p/m$ und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{m}{p}(-kx - \eta p/m) = -km\frac{x}{p} - \eta = \alpha \tag{0.6}$$

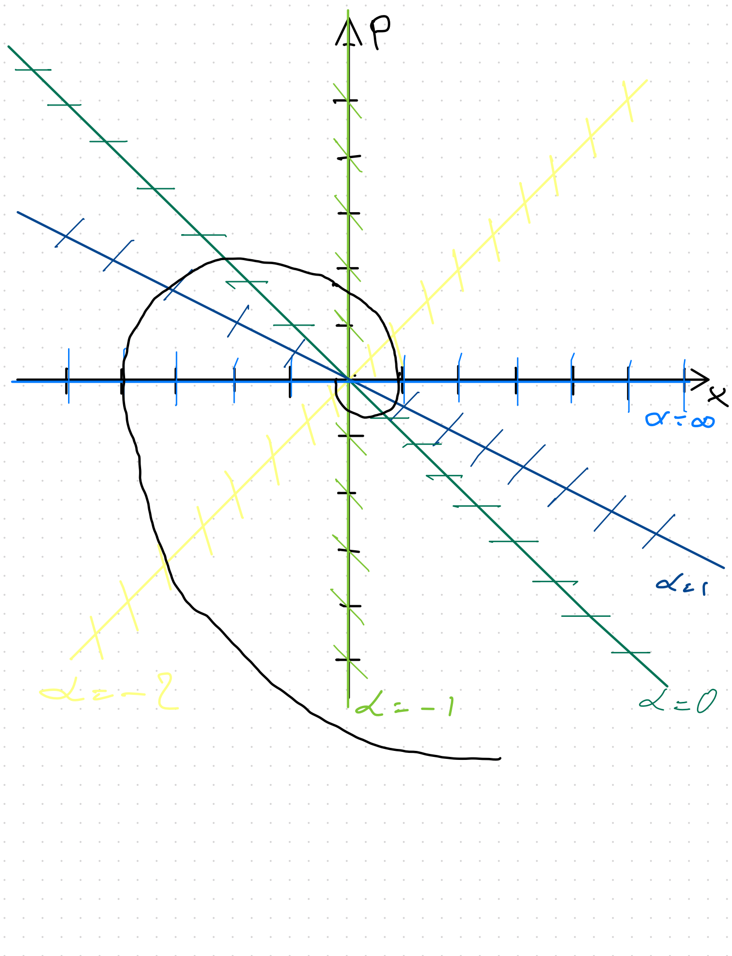
$$\Leftrightarrow \quad p(x) = -\frac{km}{\alpha + \eta}x \tag{0.7}$$

Die Isoklinen sind also Geraden, die durch den Koordinatenursprung verlaufen.

h) Skizzieren Sie die Isoklinen für $\alpha = -2, -1, 0, 1, \infty$ und verwenden Sie diese, um die Orbiten der Bewegung zu skizzieren. Wir setzen $k = m = \eta = 1$.

Hinweis: Dazu ist es hilfreich, die Steigung auf den Isoklinen zu visualisieren.

Lösung:



i) Ist die Energie des Teilchens nun noch erhalten? Warum? **Lösung:** Nun ist das System *dissipativ*. Ein Teil der Energie des Teilchens geht wegen der Reibung in Form von Wärme verloren.

In der Vorlesung haben Sie das effektive Potential des Zweikörperproblems im Zentralpotential V kennen gelernt als

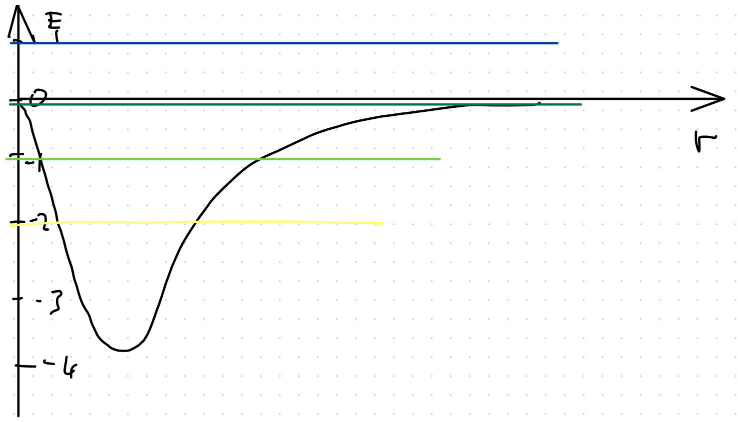
$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r).$$

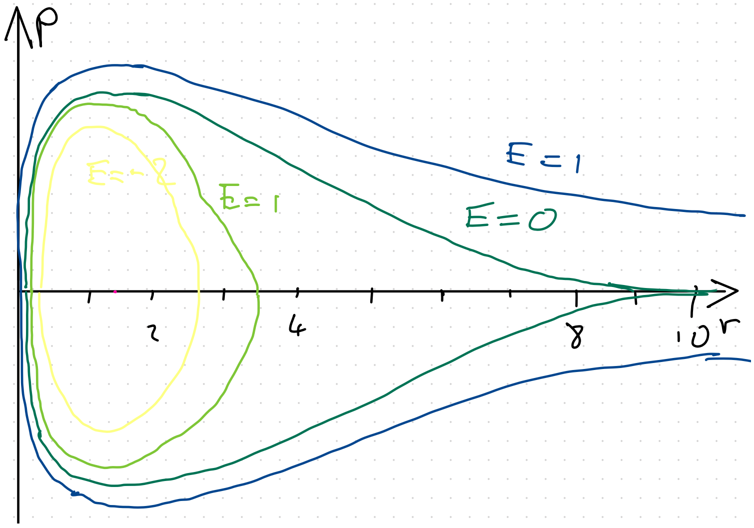
j) Skizzieren Sie die Orbiten eines Teilchens im Zentralpotential $V(r) = -\xi r e^{-r}$ für Energien $-10, -2, -1, 0, 1$ und zeichnen Sie die Isoklinen ein. Wir setzen $m = 1$ und $\xi = 10$.

Lösung: Wir berechnen die Orbiten und Isoklinen als

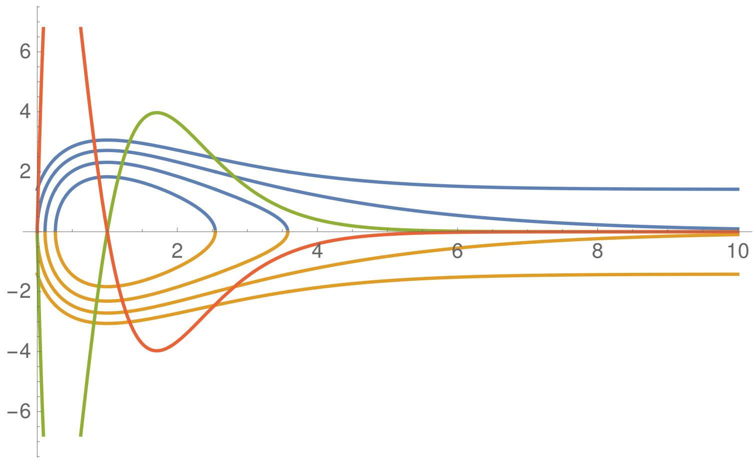
$$p_{\text{orbit}}(x) = \sqrt{2m(E - \xi r e^{-r})} \tag{0.8}$$

$$p_{\text{iso}}(x) = -\frac{m}{\alpha} V'(r) = \frac{m}{\alpha} \xi e^{-r}(1 - r) \tag{0.9}$$





Und nochmal in schön:



k) Welche Formen der Bewegung treten auf?

Lösung: Für $E < 0$ ist die Bewegung eine gebundene Bewegung; die Orbiten sind geschlossen, für $E \geq 0$ tritt eine Streuung auf.

2. **Koordinatentransformationen** [1+1+2+1+1+1=7 Punkte]

In dieser Aufgabe wollen wir integration in nicht-euklidischen Koordunaten betrachten. Betrachen wir dazu erst die Fläche in Abb. 1 links. Das Volumen der Fläche ΔA ist gegeben durch

$$\Delta A = \Delta x \Delta y.$$

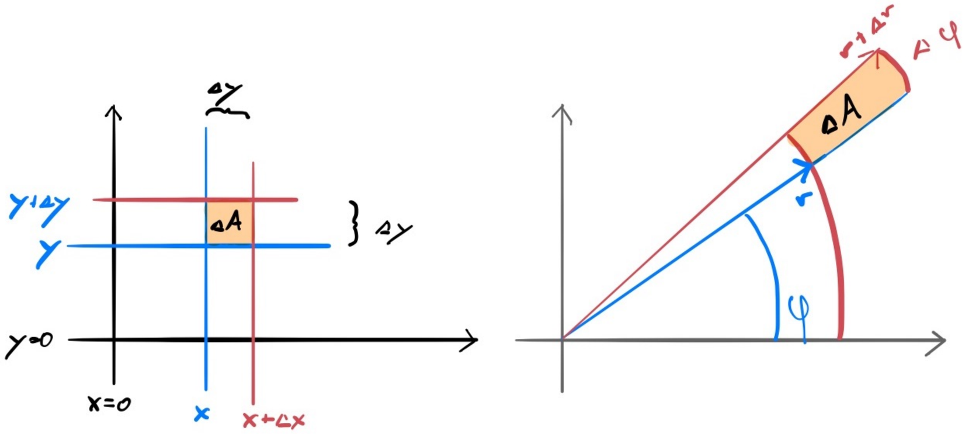


Abbildung 1: Volumen in 2D.

Wollen wir nun ähnliche Volumina in Polarkoordinaten mit

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi)$$

berechnen, siehe Abb. 1 rechts, hängt das Volumen der indizierten Fläche jedoch vom parameter r ab (je größer r ist, desto größer das ΔA für fixe $\Delta\phi, \Delta r$). Also haben wir explizit

$$\Delta x \Delta y \neq \Delta\phi\Delta r,$$

beziehungsweise für das differentielle Volumen

$$dV = dxdy \neq d\phi dr.$$

Für eine allgemeine (differenzierbare) Funktion zweier Variablen $f(p,q)$ und kleine $\Delta p, \Delta q$ gilt per Taylorentwickling (in 2D)

$$\Delta f(p,q) = \frac{\partial f(p,q)}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial f(p,q)}{\partial q}\Delta q,$$

wobei die notation $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ indiziert, dass die partielle Ableitung der Funktion f nach x im Punkt (x,y) ausgewertet wird.

a) Betrachten Sie in Polarkoordinaten $x = x(r,\varphi), y = y(r,\varphi)$ und leiten sie $\Delta x, \Delta y$ als Ausdrücke über $\Delta r, \Delta\varphi$ her.

Lösung: Mit der Taylorformel gilt

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\partial x}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\Delta\varphi \\ &= \cos(\varphi)\Delta r - r\sin(\varphi)\Delta\varphi \\ \Delta y &= \frac{\partial y}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\Delta\varphi \\ &= \sin(\varphi)\Delta r + r\cos(\varphi)\Delta\varphi.\end{aligned}$$

b) Wie lautet das Volumendifferential ΔA in Polarkoordinaten? *Da die Variation in den einzelnen Koordinaten später infinitesimal sein soll, vernachlässigen Sie dabei Terme der Form* $(\Delta x_i)^2$. Im Grenzwertprozess $\Delta f \to 0$ schreiben wir stattdessen df. Wie lautet das Volumendifferential dA in Polarkoordinaten?

Lösung: Wir haben durch einsetzen

$$\begin{aligned}\Delta A &= \Delta x \Delta y \\ &= (cos(\varphi)\Delta r - r\sin(\varphi)\Delta\varphi)(\sin(\varphi)\Delta r + r\cos(\varphi)\Delta\varphi) \\ &= r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))\Delta r\Delta\varphi \\ &= r\Delta r\Delta\varphi.\end{aligned}$$

Hier haben wir unorthodoxerweise im Übergang von Zeile 2 zu 3 angenommen, dass $\Delta r\Delta\varphi = -\Delta\varphi\Delta r$, ansonsten wäre das Volumendifferential Winkelabhängig, was keinen Sinn macht. Wir machen den Trick hier, um konsistent mit dem Ergebnis aus $d)$ zu sein. Stellt man sich infinitesimale vektoren in richtung $\boldsymbol{\Delta r}, \boldsymbol{\Delta\varphi}$ in Abb. 1 vor, erkennt man dass die (nicht normierten) Normalenvektoren $\boldsymbol{\Delta r} \times \boldsymbol{\Delta\varphi}$ und $\boldsymbol{\Delta\varphi} \times \boldsymbol{\Delta r}$ in gegensätzliche Richtungen zeigen. Da wir hier jedoch nur die Absolutbeträge der Flächenelemente aufsummieren, geht diese information in der Herleitung dieser Art verloren. Die saubere Art das Volumenelement herzuleiten wird in der $d)$ diskutiert. Im Grenzwert erhalten wir das Differential

$$dA = rdrd\varphi.$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Berechnen Sie dazu zuerst I^2.

Lösung:

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy \\ &= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-r^2} rdrd\phi \\ &= 2\pi\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} rdr \\ &= -\pi e^{-r^2}|_0^\infty \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Also gilt für das $1-$dimensionale Gauss integral $I = \sqrt{\pi}$.

Allgemein kann das Volumen eines (Hyper-)Spates, welches in einem $k-$dimensionalen Vektorraum über die Vektoren $\mathbf{v_1}, .., \mathbf{v}_k$ aufgespannt wird über die Determinante ausgedrückt werden

$$V = |det(\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v}_k)| = |det(M)|,$$

wo M eine Matrix mit elementen $(M)_{ij} = (v_j)_i$ ist. Für das Volumenelement, welches über die Vektoren $\{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{e}}_i\Delta x_i\}$ (in dieser Aufgabe arbeiten wir ohne Einsteinsche Summenkonvention) aufgespannt wird , gilt also

$$\Delta V = |det(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_1, ..., \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_k)| = det(\overline{M}^x) = \prod_{i=1}^{k} \Delta x_i,$$

wo wir den euklidischen Hyperspat über die Matrix $\overline{M}^x$: $(\overline{M}^x)_{ij} = \delta_{ij}\Delta x_j$ definieren. Im Grenzwert erhalten wir damit das Differential $dV = dx_1 dx_2 ... dx_k$. Führen wir nun eine Koordinatentransformation durch, sodass $x_i = x_i(\mathbf{y})$ und betrachten wir den Hyperspat, der durch $\{\Delta y_i\}$ ausgehend von $\mathbf{y}$ aufgespannt wird. Hier haben wir

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{\partial x_i(\mathbf{y})}{\partial y_j}\Delta y_j \\ &= \sum_k \frac{\partial x_i(\mathbf{y})}{\partial y_k}\delta_{kj}\Delta y_k \\ &= \sum_k J_{ik}\overline{M}^y_{jk} = (J\overline{M}^y)_{ij}. \end{aligned}$$

Somit können wir das Volumenelement ausdrücken als

$$\Delta V = |det(M)| = |det(J\overline{M}^y)| = |det(J)||det(\overline{M}^y)| = |det(J)|\prod_{i=1}^k \Delta y_i.$$

Im Grenzwert gilt dann analog zu oben

$$dV = dx_1...dx_k = |det(J)|dy_1...dy_k,$$

mit der Jacobi Matrix $J: \;\; J_{ij} = \frac{\partial x_i(\mathbf{y})}{\partial y_j}$. Der Term $|det(J)|$ wird Funktionaldeterminante genannt.

d) Berechnen Sie Jacobimatrix und Funktionaldeterminante für die Koordinatentransformation in Polarkoordinaten $x = x(r, \varphi), \; y = y(r, \varphi)$.

Lösung: Die Jacobi matrix ist gegeben durch

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \\ |det(J)| &= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r. \end{aligned}$$

e) Berechnen Sie Jacobimatrix und Funktionaldeterminante für die Koordinatentransformation in Kugelkoordinaten.

Lösung: Die Umrechnungsformeln von Kugelkoordinaten (r, θ, φ) in kartesische Koordinaten lauten:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante lautet also:

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = r^2\sin\theta.$$

f) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R.

Lösung:

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{Kugel}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2\pi R^3}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi R^3}{3}(-1)\cos\theta\big|_0^{\pi} \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}.
\end{aligned}$$