Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 6
Taylorentwicklung und Erhaltungsgrößen

Abgabe bis: 05.06.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Lokales Verhalten in mehreren Dimensionen** $[1+3+3+2+3+2 = 14$ Punkte$]$

   Auf einem der vorausgegangen Übungsblätter haben wir uns den Taylorschen Satz für eindimensionale Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angeschaut. Hier wollen wir uns nun Entwicklungen von reellen Funktionen in mehreren Variablen $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in Potenzreihen widmen. Dazu definieren wir neben dem gut bekannten Gradienten $\nabla\phi$, die sogenannte Hesse-Matrix von ϕ

$$H_\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2\phi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\phi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

   a) Zeigen Sie, dass $H_\phi(x_1, \ldots, x_n)$ für beliebige ϕ und $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine symmetrische Matrix ist.

   Wir betrachten die folgenden Funktionen $\phi_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $l \in \{1, 2, 3\}$

$$\phi_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2}, \qquad \phi_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}, \qquad \phi_3(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2},$$

   b) Berechnen Sie für ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 jeweils den Gradienten und die Hesse-Matrix. An welchen Stellen verschwindet der Gradient?

   c) Fertigen Sie sorgfältige Skizzen von ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 an. Zeichnen Sie auch die Paramter a und b in die jeweiligen Skizzen geeignet ein.

   d) Argumentieren Sie, dass jedes beliebige Polynom 2. Ordnung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ per Koordinatentransformation auf eine der drei Formen ϕ_1, ϕ_2 oder ϕ_3 gebracht werden kann.

   Die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung für eine ausreichend stetig differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ um den Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ kann geschrieben werden als

$$\phi(x) = \phi(a) + (x-a)\cdot(\nabla\phi)(a) + \frac{1}{2}(x-a)\cdot H_\phi(a)(x-a) + O(|x-a|^3). \quad \text{(Taylor-Entwicklung)}$$

   e) Leiten Sie die oben angegebenene Taylor-Entwicklung in 2-ter Ordnung her. (Eine genaue Diskussion des Restgliedes sei hier nicht verlangt.)

   f) Wie verallgemeinert sich die obige Diskussion für mögliche Formen von Polynome 2. Ordnung auf dem $\mathbb{R}^2$ (unter Koordinatentransformationen) auf den $\mathbb{R}^n$, $n > 2$? Welche Schlussfolgerungen ergeben sich daraus für das lokale Verhalten beliebiger Funktionen $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

2. **Runge-Lenz Vektor** [1 + 5 + 2 + 3 + 2 = 13 Punkte]

   In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einer Besonderheit des Kepler-Problems: Neben der Energie und dem Drehimpuls gibt es noch eine weitere Erhaltungsgröße. Betrachten Sie dazu ein Teilchen der Masse m im Gravitationspotential $U : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $U(r) = -\xi/r$ mit $\xi = \gamma M m$ und γ der Gravitationskonstante, eines Objekts mit Masse M und mit Drehimpuls $\boldsymbol{L}$. Der sogenannte *Runge-Lenz Vektor* ist definiert als die Größe

   $$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L} - \gamma M m \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

   mit $r = |\mathbf{r}|$.[1]

   a) Warum liegt der Runge-Lenz Vektor $\boldsymbol{A}$ in der Bahnebene?

   b) Zeigen Sie das $\boldsymbol{A}$ eine Erhaltungsgröße ist.

   c) Sie wissen aus der Vorlesung das Teilchen im Gravitationspotential einer Ellipse folgen. Zeichnen Sie den Runge-Lenz Vektor in diese Ellipse ein.

   d) Drücken sie r durch $A = |\boldsymbol{A}|$ und den Winkel θ zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{A}$ aus. *(Hinweis: Nutzen sie die Formel $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$.*

   e) Betrachten Sie nun ein Teilchen, dessen Bewegung durch ein Potential $V(r) = -\alpha r^{-\delta}$ für $\delta > 0$, $\delta \neq 1$ beschrieben wird. Zeigen Sie das $\boldsymbol{A}$ keine Erhaltungsgröße von Bewegungen in einem solchen Potential sein kann.

[1] Eine alternative, äquivalente Definition des Runge-Lenz Vektors ist $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \xi m \frac{\boldsymbol{r}}{r} = m\boldsymbol{A}$.