Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 6
Taylorentwicklung und Erhaltungsgrößen

Abgabe bis: 05.06.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Lokales Verhalten in mehreren Dimensionen** $[1+3+3+2+3+2 = 14$ Punkte$]$
Auf einem der vorausgegangen Übungsblätter haben wir uns den Taylorschen Satz für eindimensionale Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angeschaut. Hier wollen wir uns nun Entwicklungen von reellen Funktionen in mehreren Variablen $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in Potenzreihen widmen. Dazu definieren wir neben dem gut bekannten Gradienten $\nabla\phi$, die sogenannte Hesse-Matrix von ϕ

$$H_\phi(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_2\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_2\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_n\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $H_\phi(x_1,\dots,x_n)$ für beliebige ϕ und $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine symmetrische Matrix ist.

Lösung: Wenn ϕ mindestens zweifach partiell stetig differenzierbar, dann folgt nach der Regel von Schwarz, dass

$$[H_\phi(x_1,\dots,x_n)]_{i,j} = \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2\phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j\partial x_i} = [H_\phi(x_1,\dots,x_n)]_{j,i}$$

für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Somit ist $H_\phi(x_1,\dots,x_n)$ symmetrisch.

Wir betrachten die folgenden Funktionen $\phi_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $l \in \{1,2,3\}$

$$\phi_1(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{a^2}, \qquad \phi_2(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}, \qquad \phi_3(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2},$$

b) Berechnen Sie für ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 jeweils den Gradienten und die Hesse-Matrix. An welchen Stellen verschwindet der Gradient?

Lösung: Man findet sofort, dass

$$\nabla\phi_1(x_1,x_2) = 2\begin{pmatrix} x_1/a^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \nabla\phi_2(x_1,x_2) = 2\begin{pmatrix} x_1/a^2 \\ x_2/b^2 \end{pmatrix},$$
$$\nabla\phi_3(x_1,x_2) = 2\begin{pmatrix} x_1/a^2 \\ -x_2/b^2 \end{pmatrix}.$$

Für die Hesse-Matrizen rechnet man weiterhin:

$$H_{\phi_1}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2/a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_{\phi_2}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2/a^2 & 0 \\ 0 & 2/b^2 \end{pmatrix}$$
$$H_{\phi_3}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2/a^2 & 0 \\ 0 & -2/b^2 \end{pmatrix}.$$

c) Fertigen Sie sorgfältige Skizzen von ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 an. Zeichnen Sie auch die Paramter a und b in die jeweiligen Skizzen geeignet ein.

Lösung: Die Skizzen kommen bald.

d) Argumentieren Sie, dass jedes beliebige Polynom $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welches nur Terme 2. Ordnung enthält, per Koordinatentransformation auf eine der fünf Formen $\pm\phi_1$, $\pm\phi_2$ oder ϕ_3 gebracht werden kann. Welche Polynome 2. Ordnung lassen sich darüberhinaus auf eine der obigen Formen bis auf eine Konstantenverschiebung des Funktionswertes geschrieben werden?

Lösung: Ein Polynom ϕ, welches nur quadratische Terme enthält, kann geschrieben werden als $\phi(x) = x^T Qx$ mit symmetrischer Matrix $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Die Matrix Q ist gerade die Hesse-Matrix von ϕ. Die Matrix Q ist diagonalisierbar $Q = O\Lambda O^T$ wobei $O \in O(2)$ eine orthogonale Matrix und $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ ist. Wir betrachten nun die folgenden Fälle:

i. Ein Eigenwert verschwindet. Wir können O immer so wählen, dass $\lambda_2 = 0$. Nach der Koordinatentrafo $x \mapsto O^T x$ sieht ϕ somit aus wie $\pm\phi_1$ mit $a = \sqrt{2/|\lambda_1|}$. Das Vorzeichen von ϕ_1 richtet sich nach dem Vorzeichen von λ_1.

ii. Beide Eigenwerte verschwinden nicht und haben gleich Vorzeichen. Unter Koordinatentrafo $x \mapsto O^T x$ transformiert sich ϕ zu $\pm\phi_3$ mit $a = \sqrt{2/|\lambda_1|}$ und $b = \sqrt{2/|\lambda_2|}$. Das Vorzeichen von ϕ_2 richtet sich wiederum nach dem Vorzeichen der Eigenwerte.

iii. Beide Eigenwerte verschwinden nicht und haben unterschiedliche Vorzeichen. Wir können O so wählen, dass gerade λ_1 der positive und λ_2 der negative Eigenwert ist. Unter Koordinatentrafo $x \mapsto O^T x$ transformiert sich ϕ zu ϕ_3 mit den Werten von a und b wie in (ii.).

Wir sehen also, dass die Hessematrix das lokale Verhalten als Sattelpunkte, Minima und Maxima vollständig klassifiziert.

Ein allgemeines Polynom 2. Ordnung kann nun noch einen linearen Term und konstanten Term enthalten $\phi(x) = x^T Qx + b^T x + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^2$ und $Q = Q^T \in \mathbb{R}^2$. Oft können per Koordinatenverschiebung und quadratischer Ergänzung den linearen Term entfernen. Dazu führen wir die Koordinatentransformation $x \mapsto x + \frac{1}{2}Q^{-1}b$ aus. Damit dies funktioniert, müssen wir annehmen, dass Q auf dem linearen Unterraum von b invertierbar ist. Unter dieser Transformation transformiert sich $\phi(x)$ zu

$$\tilde{\phi}(x) = x^T Qx + \frac{1}{4}|Q^{-1}b|^2 + c.$$

Somit haben wir nur noch einen konstante Verschiebung des Funktionswert und keinen linearen Term mehr. Nun können wir wieder mit der orthogonalen Matrix, die Q diagonalisiert, rotieren, um auf eine der Standardformen zu kommen.

Die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung für eine ausreichend stetig differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um den Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ kann geschrieben werden als

$$\phi(x) = \phi(a) + (x-a)\cdot(\nabla\phi)(a) + \frac{1}{2}(x-a)\cdot H_\phi(a)(x-a) + O(|x-a|^3). \quad \text{(Taylor-Entwicklung)}$$

e) Leiten Sie die oben angegebenene Taylor-Entwicklung in 2-ter Ordnung her. (Eine genaue Diskussion des Restgliedes sei hier nicht verlangt.)

Lösung: Da wir auf einem vorausgegangen Zettel schon hart dafür gearbeitet haben die Taylor-Entwicklung für eindimensionale Funktionen herzuleiten, werden wir es uns hier einfach machen und den multidimensionalen Fall auf den eindimensionalen Fall zurückführen. Dazu schauen wir uns das Geradenstück $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\alpha(t) =$

$(1-t)a+tx$. Wir haben α so gewählt, dass $\alpha(0)=a$ und $\alpha(1)=x$ sowie $\dot\alpha(t)=x-a$. Nun schauen wir uns die eindimensionale Taylorentwicklung der Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f=\phi\circ\alpha$ um 0:

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{1}{2}f''(0)t^2+R_3(t).$$

Dies ist möglich, da per Annahme ϕ auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist. Hier ist R_3 das Restglied in $O(t^3)$, das für diese Aufgabe keine nähere Beachtung finden soll. Per Kettenregel können wir nun ausrechen, dass

$$f'(t)=\sum_i \left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}\left.\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t}\right|_t=\nabla\phi(\alpha(t))\cdot\dot\alpha(t).$$

Für $t=0$ haben wir

$$f'(0)=\nabla\phi(a)\cdot(x-a).$$

Die zweite Ableitung braucht nun auch noch die Produktregel

$$f''(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}\left.\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t}\right|_t \tag{0.1}$$

$$=\sum_{i,j}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}\left.\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t}\right|_t\left.\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t}\right|_t+\sum_i\left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)}\left.\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}\right|_t \tag{0.2}$$

$$=\dot\alpha(t)\cdot H_\phi(\alpha(t))\dot\alpha(t), \tag{0.3}$$

wobei wir im letzten Schritt $\ddot\alpha\equiv 0$ benutzt haben. Für $t=0$ haben wir nun

$$f''(0)=(x-a)\cdot H_\phi(a)(x-a).$$

Setzen wir diese Ausdrücke nun in die eindimensionale Taylor-Entwicklung von f für $t=1$ ein, so erhalten wir

$$f(1)=\phi(x)=\phi(a)+\nabla\phi(a)\cdot(x-a)+(x-a)\cdot H_\phi(a)(x-a)+R_3(1).$$

Wenn man nun ein weiteres mal Ableiten würden, so fände man, dass $f'''(0)$ und somit $R_3(1)$ in $O(|x-a|^3)$ ist.

f) Wie verallgemeinert sich die obige Diskussion für mögliche Formen von Polynome 2. Ordnung auf dem $\mathbb{R}^2$ (unter Koordinatentransformationen) auf den $\mathbb{R}^n$, $n>2$? Welche Schlussfolgerungen ergeben sich daraus für das lokale Verhalten beliebiger Funktionen $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$?

Lösung: Wir können wieder die Hesse-Matrix diagonalisieren und die Polynome anhand der Signatur des Spektrums, also der Vorzeichen der Eigenwerte, klassifizieren. Wenn alle Eigenwerte nicht verschwinden und das gleiche Vorzeichen haben, so liegt hat das Polynom ein eindeutigen minimalen beziehungsweise maximalen Punkt. Wenn die Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen haben, dann haben wir einen hochdimensionalen Sattelpunkt mit steigenden oder abfallenden Richtungen. Schließlich zeigen verschwindende Eigenwerte Richtungen ohne Krümmung an. Da wir gemäß unserer Taylorentwicklung eine beliebige zweifache stetig differenzierbare Funktion lokal durch die entsprechenden Hesse-Matrix beschreiben können, lässt sich die Klassifizierung in Minimia, Maxima, Sattelpunkte und Sattel mit flachen Richtungen auf das lokale Verhalten der Funktionen direkt übertragen.

2. **Runge-Lenz Vektor** [1 + 5 + 2 + 3 + 2 = 13 Punkte]

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einer Besonderheit des Kepler-Problems: Neben der Energie und dem Drehimpuls gibt es noch eine weitere Erhaltungsgröße. Betrachten Sie dazu ein Teilchen der Masse m im Gravitationspotential $U : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $U(r) = -\xi/r$ mit $\xi = \gamma M m$ und γ der Gravitationskonstante, eines Objekts mit Masse M und mit Drehimpuls $\boldsymbol{L}$. Der sogenannte *Runge-Lenz Vektor* ist definiert als die Größe

$$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L} - \gamma M m \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

mit $r = |\mathbf{r}|$.[1]

a) Warum liegt der Runge-Lenz Vektor $\boldsymbol{A}$ in der Bahnebene?

Lösung: Das liegt an

$$\boldsymbol{L}(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}) = 0.$$

Daher ist $\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}$ in der Bahnebene genauso wie $\gamma M \boldsymbol{r}/r$.

b) Zeigen Sie das $\boldsymbol{A}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Lösung: Wir berechnen die Ableitung:

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{L}} - \gamma M m \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\boldsymbol{r}\dot{r}}{r^2} \right) \tag{0.4}$$

$$= \frac{1}{m} \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{L} + 0 - \gamma M m \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\boldsymbol{r}(\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r})}{r^3} \right) \tag{0.5}$$

$$= -\gamma M m \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \times \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} - \gamma M m \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\boldsymbol{r}(\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r})}{r^3} \right). \tag{0.6}$$

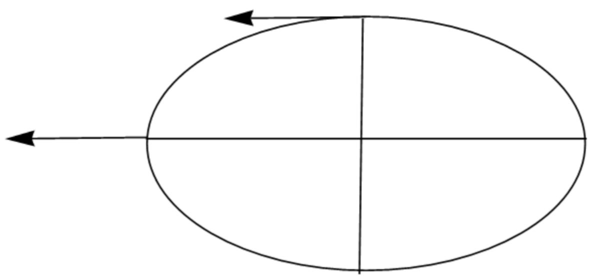
Nach Verwendung der *bac-cab Regel* erhalten wir daraus

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \gamma M m \left(-\frac{(\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r}}{r^3} + \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} + \frac{\boldsymbol{r}(\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r})}{r^3} \right) \tag{0.7}$$

$$= 0. \tag{0.8}$$

Dies gilt für alle t, wheshalb A eine Konstante sein muss.

c) Sie wissen aus der Vorlesung das Teilchen im Gravitationspotential einer Ellipse folgen. Zeichnen Sie den Runge-Lenz Vektor in diese Ellipse ein.



Lösung:

d) Drücken sie r durch $A = |\boldsymbol{A}|$ und den Winkel θ zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{A}$ aus. *(Hinweis: Nutzen sie die Formel $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$.*

[1] Eine alternative, äquivalente Definition des Runge-Lenz Vektors ist $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \xi m \frac{\boldsymbol{r}}{r} = m\boldsymbol{A}$.

Lösung: Wir berechnen das Skalarprodukt

$$Ar\cos\theta = \boldsymbol{r}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}) - \gamma M m r. \tag{0.9}$$

Benutzt man die Regel $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ so erhält man

$$\boldsymbol{r}(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}) = (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{L} = \frac{1}{m}\boldsymbol{L}\boldsymbol{L} = \frac{1}{m}L^2. \tag{0.10}$$

Daher,

$$r = L^2 \frac{1}{m^2(\gamma M + A\cos\theta)}. \tag{0.11}$$

Das ist eine andere Art eine Ellipse zu beschreiben.

e) Betrachten Sie nun ein Teilchen, dessen Bewegung durch ein Potential $V(r) = -\alpha r^{-\delta}$ für $\delta > 0$, $\delta \neq 1$ beschrieben wird. Zeigen Sie das $\boldsymbol{A}$ keine Erhaltungsgröße von Bewegungen in einem solchen Potential sein kann.

Lösung: Die gleiche Rechnung wie in a) ergibt

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \gamma M m \delta \left(-\frac{(\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r}}{r^{2+\delta}} + \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r^\delta} - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} + \frac{\boldsymbol{r}(\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r})}{r^3} \right) \tag{0.12}$$

für $\delta \neq 0$ kann der obige Ausdruck nicht allgemein 0 sein.