Freie Universität Berlin
**Analytische Mechanik**
Sommer-Semester 2020

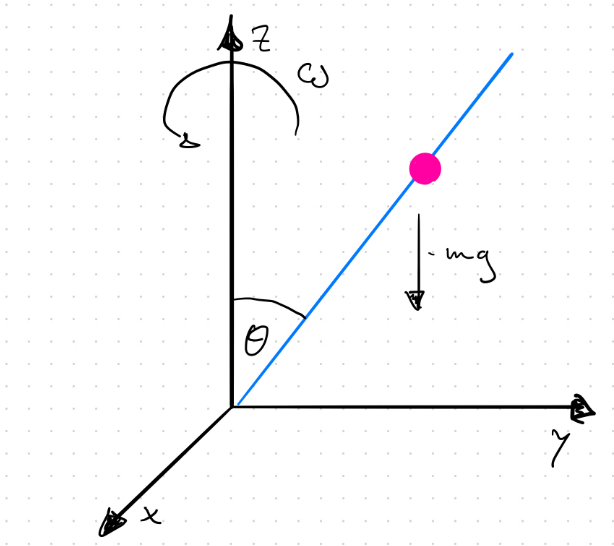
# Übungsblatt 6
# Bewegung unter Zwangsbedingungen

**Abgabe bis: 12.06.2020 um 12:00 Uhr**

---

1. **Perle auf Stab** [$2 + 6 + 1 + 2 + 4 = 15$ Punkte]

Wir betrachten eine Perle, idealisiert als Massenpunkt der Masse $m$, die reibungsfrei auf einem Draht gleitet, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und konstantem Neigungswinkel $\theta$ um eine Achse rotiert. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.




In dieser Aufgabe wollen wir die Bewegung der Perle unter den gegebenen Zwangsbedingungen analysieren. Dazu eigenen sich natürlich Kugelkoordinaten.

a) Geben Sie die Zwangsbedingungen $S_j(\boldsymbol{r}, t)$ für die Bewegung der Perle an.

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass sogenannte *Zwangskräfte* $\lambda_j \nabla S_j$ mit Lagrange Multiplikatoren $\lambda_j \in \mathbb{R}$ die Bedingungen $S_j$ in der Bewegung erzwingen.

b) Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1. Art auf und bestimmen Sie die wirkenden Zwangskräfte in Abhängigkeit von $\vartheta, \omega, r, \dot{r}$.

*Hinweis: Die Beschleunigung in Kugelkoordinaten $(r, \varphi, \vartheta)$ ist gegeben als*

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\vartheta$$
$$+ ((r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\vartheta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta))\boldsymbol{e}_\varphi$$

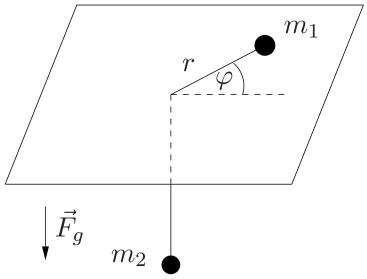
c) Wie interpretieren Sie die Zwangskräfte.

d) Bei welchem Abstand $r$ wirkt entlang des Drahtes keine Kraft auf die Perle?

e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangswerte $r(t = 0) = r_0, \dot{r}(t = 0) = 0$. *Hinweis: Machen Sie sich dabei zunutze, dass Sie in der Aufgabe d) schon eine spezielle Lösung gefunden haben.*

2. **Verbundene Massen mit planarer Zwangsbedingung** [4 + 2 + 3 + 2 + 4 = 15 Punkte]

Zwei Massen $m_1$ und $m_2$ sind durch einen Faden der Länge $L$ verbunden, der durch ein Loch in einer horizontalen Fläche (der $(x-y)$-Ebene) verläuft. Die Masse $m_1$ gleitet reibungslos auf der horizontalen Fläche, während $m_2$ senkrecht nach unten hängt und sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegt.




a) Unter der Annahme, dass das Faden straff bleibt, bestimmen Sie die Zwangsbedingung für dieses Problem und stellen die Lagrange-Gleichungen der 1. Art in Zylinderkoordinaten auf. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für Radial- und Winkelkoordinaten der ersten Masse, $r_1$ und $\varphi_1$, ab,

$$(m_1 + m_2)\ddot{r}_1 - m_1 r_1 \dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0 \tag{0.1}$$

$$m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 + 2 m_1 r_1 \dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 = 0 \tag{0.2}$$

*Hinweis: in Zylinderkoordinaten gilt es*

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \left(\ddot{r}_k - r_k \dot{\varphi}_k^2\right) \hat{\mathbf{e}}_{r_k} + (2\dot{r}_k \dot{\varphi}_k + r_k \ddot{\varphi}_k)\hat{\mathbf{e}}_{\varphi_k} + \ddot{z}_k \hat{\mathbf{e}}_{z_k}$$

b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls von $m_1$, $l_1 = m_r r_1^2 \dot{\varphi}$, gleich einer Konstanten ist, die wir im Folgenden $l$ nennen. (*Hinweis: beginnen mit Gleichung (0.17)*)

c) Schreiben Sie $\dot{\varphi}_1$ in Form von $l$ und ersetzen Sie dann diesen Ausdruck in der Bewegungsgleichung für $r_1$. Diskutieren Sie das Verhalten von $r_1$ für verschiedene Werte des Drehimpulses. Zeigen Sie, dass es für einen festen Drehimpuls $l$ einen kritischen Radius $r_1^*$ gibt, in dem $\ddot{r}_1$ verschwindet.

d) Zeigen Sie, dass eine Trajektorie für die der Radius $r_1(t) = r_1^* = \text{const.}$ ist, die Bewegungsgleichung erfüllt. Erklären Sie, welche Kräfte ausgeglichen werden müssen, um zu dieser Gleichgewichtssituation zu führen.

e) Nun bewegt sich die Masse auf dieser Gleichgewichtsbahn mit konstantem Radius $r_1^*$ und wird durch eine kleine Störung $\epsilon(t)$ in radialer Richtung abgelenkt. Schreiben Sie $r(t) = r_1^* + \epsilon(t)$, und schreiben Sie die Bewegungsgleichung für $r_1$ in Bezug auf $\epsilon(t)$ neu. Lassen Sie alle Terme zweiter oder höherer Ordnung in $\epsilon$ fallen und zeigen Sie, dass die resultierende Trajektorie stabil ist und dass $r_1(t)$ sinusförmig um $r_1^*$ oszillieren wird. Was ist die Frequenz dieser Oszillationen?