Freie Universität Berlin

Analytische Mechanik

Sommer-Semester 2020

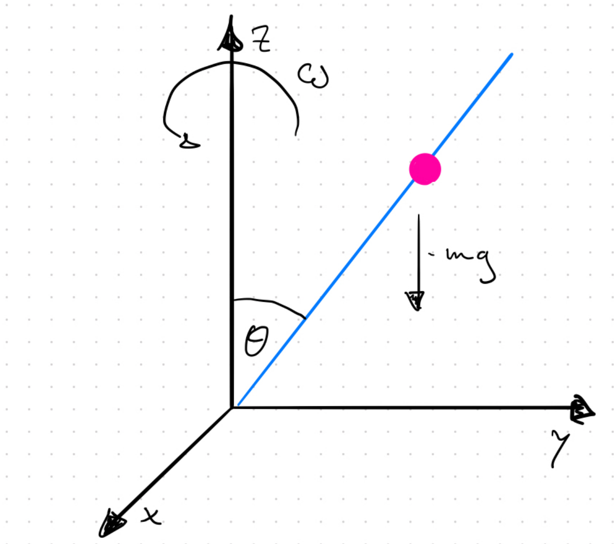
Übungsblatt 6
Bewegung unter Zwangsbedingungen

Abgabe bis: 12.06.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Perle auf Stab** [$2 + 6 + 1 + 2 + 4 = 15$ Punkte]

Wir betrachten eine Perle, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, die reibungsfrei auf einem Draht gleitet, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel θ um eine Achse rotiert. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.



In dieser Aufgabe wollen wir die Bewegung der Perle unter den gegebenen Zwangsbedingungen analysieren. Dazu eigenen sich natürlich Kugelkoordinaten.

a) Geben Sie die Zwangsbedingungen $S_j(\boldsymbol{r}, t)$ für die Bewegung der Perle an.

Lösung: Der rotierende Stab stellt zwei Zwangsbedingungen, die die Bewegungsfreiheit der Perle in drei Dimensionen auf eine Dimension einschränken.

Zum einen ist der Winkel ϑ, in dem der rotierende Stab zur Rotationsachse in z-Richtung steht, gegeben durch θ. Das gibt uns

$$S_1(r, \varphi, \vartheta, t) = \vartheta - \theta = 0.$$

Zum anderen ist der Azimuthwinkel φ stets durch die Rotation des Stabes um die Achse gegeben und verändert sich mit Winkelgeschwindigkeit ω. Wir wählen die Ausrichtung unseres Koordinatensystems nun so, dass $\varphi = 0$ bei $t = 0$ gilt, sodass

$$S_2(r, \varphi, \vartheta, t) = \varphi - \omega t = 0.$$

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass sogenannte *Zwangskräfte* $\lambda_j \nabla S_j$ mit Lagrange Multiplikatoren $\lambda_j \in \mathbb{R}$ die Bedingungen S_j in der Bewegung erzwingen.

b) Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1. Art auf und bestimmen Sie die wirkenden Zwangskräfte in Abhängigkeit von $\vartheta, \omega, r, \dot{r}$.

Hinweis: Die Beschleunigung in Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) ist gegeben als

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\vartheta + ((r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\vartheta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta))\boldsymbol{e}_\varphi$$

Lösung: Die Lagrangegleichungen erster Art sind durch die $3+2$ Gleichungen

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) + \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \nabla U(\boldsymbol{r}, t) + \nabla \sum_{j=1}^{2} \lambda_j S_j(\boldsymbol{r}, t)$$

$$S_j(\boldsymbol{r}, t) = 0,$$

gegeben. Hierbei ist $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2$ die Zwangskraft, die durch die Zwangsbedingungen S_1 und S_2 auf die Perle wirkt. Wir finden also

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -mg\boldsymbol{e}_z + \lambda_1\nabla(\vartheta - \theta) + \lambda_2\nabla(\varphi - \omega t).$$

Nun verwenden wir den Gradienten in Kugelkoordinaten

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

um die Zwangskräfte zu bestimmen:

$$Z_1(r, \varphi, \vartheta) = \lambda_1\nabla(\vartheta - \theta) = \lambda_1\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\vartheta\partial_\vartheta(\vartheta - \theta) = \lambda_1\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\vartheta \tag{0.1}$$

$$Z_2(r, \varphi, \vartheta) = \lambda_2\nabla(\varphi - \omega t) = \lambda_2\frac{1}{r\sin\vartheta}\boldsymbol{e}_\varphi\partial_\varphi(\varphi - \omega t) = \lambda_2\frac{1}{r\sin\vartheta}\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{0.2}$$

da alle anderen Ableitungen verschwinden.

Um nun die Lagrangegleichungen aufzustellen müssen wir nur noch den Einheitsvektor in z-Richtung durch $\boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_r$ darstellen. Das können wir entweder tun, indem wir die Rotationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

von rechts auf den Vektor $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\vartheta)$ anwenden :

$$(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z) = (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_\varphi)S^T, \tag{0.4}$$

oder indem wir es uns geometrisch überlegen. Wir erinnern uns, dass die Einheitsvektoren in ϑ und φ Richtung tangential zur Kugeloberflaeche liegen: $\boldsymbol{e}_\varphi$ zeigt nach Osten, $\boldsymbol{e}_\vartheta$ nach Süden. Der Vektor $\boldsymbol{e}_z$ kann also nur eine r und eine ϑ Komponente haben. Es ergibt sich

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\vartheta\boldsymbol{e}_r - \sin\vartheta\boldsymbol{e}_\vartheta. \tag{0.5}$$

Insgesamt finden wir dann in den drei Komponenten

$$m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r = -mg\cos\vartheta\boldsymbol{e}_r$$

$$m(2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\vartheta = \left(mg\sin\vartheta + \frac{\lambda_1}{r}\right)\boldsymbol{e}_\vartheta$$

$$m((r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\vartheta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta))\boldsymbol{e}_\varphi = \left(\frac{\lambda_2}{r\sin\vartheta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

Zusätzlich müssen nun die Zwansbedingungen $S_1 = S_2 = 0$ erfüllt sein. Diese Bedingungen $\vartheta = \theta$ und $\varphi = \omega t$ können wir direkt in die Bewegungsgleichungen einsetzen.

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\sin^2(\theta)\omega^2)\boldsymbol{e}_r &= -mg\cos\theta\boldsymbol{e}_r \\ m(-r\sin(\theta)\cos(\theta)\omega^2)\boldsymbol{e}_\vartheta &= \left(mg\sin\theta + \frac{\lambda_1}{r}\right)\boldsymbol{e}_\vartheta \\ 2m\dot{r}\omega\sin(\theta)\boldsymbol{e}_\varphi &= \left(\frac{\lambda_2}{r\sin\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi, \end{aligned}$$

und die Zwangskräfte bestimmen, indem wir nach λ_1, λ_2 auflösen:

$$\lambda_1 = -mr^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - rmg\sin\theta \tag{0.6}$$

$$\lambda_2 = 2mr\dot{r}\omega\sin^2\theta \tag{0.7}$$

sodass

$$\boldsymbol{Z}_1(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = -m(r\omega^2\sin\theta\cos\theta + g\sin\theta)\boldsymbol{e}_\vartheta \tag{0.8}$$

$$\boldsymbol{Z}_2(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = 2m\dot{r}\omega\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \tag{0.9}$$

c) Wie interpretieren Sie die Zwangskräfte.

Lösung: Beide Zwangskräfte greifen per Konstruktion senkrecht zur Mannigfaltigkeit an, auf der die Perle sich bewegen kann. Die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}_1$ wirkt in Richtung Norden auf der Kugeloberfläche und gleicht einerseits die Gravitationskraft aus und andererseits aber auch die Fliehkräfte wegen der Rotation des Stabes. Die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}_2$ wirkt in Rotationsrichtung und zwingt die Perle so auf ihre Kreisbahn. Diese Kraft hängt neben der Winkelgeschwindigkeit auch von der Änderung des Abstandes vom Ursprung ab und bezieht so die Corioliskraft mit ein.

d) Bei welchem Abstand r wirkt entlang des Drahtes keine Kraft auf die Perle?

Lösung: Wenn keine Kraft auf die Perle wirkt ist $\ddot{r} = 0$, sodass wir aus der Radialkomponente der Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen haben:

$$-r\omega^2\sin^2(\theta) = -g\cos(\theta) \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2(\theta)} \tag{0.10}$$

e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangswerte $r(t=0) = r_0, \dot{r}(t=0) = 0$.

Hinweis: Machen Sie sich dabei zunutze, dass Sie in der Aufgabe d) schon eine spezielle Lösung gefunden haben.

Lösung: Wir wollen nun die folgende Gleichung lösen

$$\ddot{r} - r\omega^2\sin^2(\theta) = -g\cos(\theta). \tag{0.11}$$

Die homogene Gleichung lautet

$$\ddot{r} = r\omega^2\sin^2(\theta),$$

welche wir einfach durch einen exponentiellen Ansatz $r_{\mathsf{hom}}(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$ mit Konstanten A, B und $\alpha = \omega\sin(\theta)$ lösen können.

Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist genau gegeben durch $r_{\mathsf{sp}}(t) = g\cos(\theta)/(\omega^2 \sin^2\theta)$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} r(t) &= r_{\mathsf{hom}}(t) + r_{\mathsf{sp}}(t) && (0.12)\\ &= Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t} + \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2\theta}. && (0.13) \end{aligned}$$

Mit den Anfangsbedingungen $\dot{r}(0) = 0, r(0) = r_0$ finden wir dann

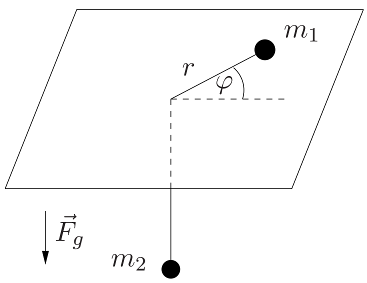
$$A = B = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2\theta}\right), \tag{0.14}$$

und damit

$$r(t) = \left(r_0 - \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2\theta}\right)\cosh(\omega\sin(\theta)t) + \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2\sin^2\theta} \tag{0.15}$$

2. **Verbundene Massen mit planarer Zwangsbedingung** [4 + 2 + 3 + 2 + 4 = 15 Punkte]

   Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch einen Faden der Länge L verbunden, der durch ein Loch in einer horizontalen Fläche (der $(x-y)$-Ebene) verläuft. Die Masse m_1 gleitet reibungslos auf der horizontalen Fläche, während m_2 senkrecht nach unten hängt und sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegt.



   a) Unter der Annahme, dass das Faden straff bleibt, bestimmen Sie die Zwangsbedingung für dieses Problem und stellen die Lagrange-Gleichungen der 1. Art in Zylinderkoordinaten auf. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für Radial- und Winkelkoordinaten der ersten Masse, r_1 und φ_1, ab,

$$\begin{aligned} (m_1+m_2)\ddot{r}_1 - m_1 r_1\dot{\varphi}^2 + m_2 g &= 0 && (0.16)\\ m_1 r_1^2\ddot{\varphi}_1 + 2m_1 r_1\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 &= 0 && (0.17) \end{aligned}$$

   Hinweis: In Zylinderkoordinaten gilt

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \left(\ddot{r}_k - r_k\dot{\varphi}_k^2\right)\hat{\mathbf{e}}_{r_k} + (2\dot{r}_k\dot{\varphi}_k + r_k\ddot{\varphi}_k)\hat{\mathbf{e}}_{\varphi_k} + \ddot{z}_k\hat{\mathbf{e}}_{z_k}$$

   Lösung: Mit den Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}_{r,\varphi,z}$ in Zylinderkoordinaten können wir sowohl die Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \left(\ddot{r}_k - r_k\dot{\varphi}_k^2\right)\hat{\mathbf{e}}_{r_k} + (2\dot{r}_k\dot{\varphi}_k + r_k\ddot{\varphi}_k)\hat{\mathbf{e}}_{\varphi_k} + \ddot{z}_k\hat{\mathbf{e}}_{z_k}$$

   als auch den Gradienten schreiben

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Unter der Annahme, dass der Faden straff bleibt, erhalten wir die Zwangsbedingung $S_1(r_1, z_2) = r_1 + |z_2| - L = 0$. Zudem stellen wir fest, dass in unserem Problem stets $z_2 < 0$ gilt, sodass $S_1(r_1, z_2) = r_1 - z_2 - L = 0$. Die potentielle Energie ist einfach durch das Gravitationspotential $U = mgz_2$ gegeben, sodass wir aus den Lagrange Gleichungen erster Art

$$m\ddot{\mathbf{r}}_k(t) = -\nabla_k U\left(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t), t\right) + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \nabla_k S_j\left(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t), t\right)$$

mit $k = \{1, 2\}$ und $j = 1$ lediglich drei nichttriviale Gleichungen erhalten (da z_1, φ_2 und r_2 konstant bleiben).

$$\begin{aligned} m_1\ddot{r}_1 - m_1 r_1 \dot{\varphi}^2 &= -\frac{\partial}{\partial r_1} U + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial r_1}(r_1 - z_2 - L) \\ \Rightarrow m_1\ddot{r}_1 - m_1 r_1 \dot{\varphi}^2 &= \lambda_1 \end{aligned} \tag{0.18}$$

$$\begin{aligned} m_1 r_1 \ddot{\varphi}_1 + 2m_1\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 &= -\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial \varphi_1} U + \lambda_1 \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial \varphi_1}(r_1 - z_2 - L) \\ \Rightarrow m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 + 2m_1 r_1 \dot{r}_1\dot{\varphi}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{0.19}$$

$$\begin{aligned} m_2\ddot{z}_2 &= -\frac{\partial}{\partial z_2} U + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z_2}(r_1 - z_2 - L) \\ \Rightarrow m_2\ddot{z}_2 &= -m_2 g - \lambda_1 \end{aligned} \tag{0.20}$$

Unter der Zwangsbedingung $S_1 = 0$ gilt nun, dass $r_1 = z_2 + L$ und damit $\ddot{r}_1 = \ddot{z}_2$. Wir können also (0.16) und (0.18) kombinieren, um die folgende Gleichung zu erhalten.

$$(m_1 + m_2)\ddot{r}_1 - m_1 r_1 \dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0 \tag{0.21}$$

b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls von m_1, $l_1 = m_r r_1^2 \dot{\varphi}$, gleich einer Konstanten ist, die wir im Folgenden l nennen. (*Hinweis: beginnen mit Gleichung (**??**)*)

Lösung: Wir können Gleichung (0.17) als zeitliche änderung des Drehimpulses auffassen. Mit der Ketten- und der Produktregel erhalten wir.

$$\frac{d}{dt} m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1 = m_1 \dot{r}_1 \frac{\partial}{\partial r_1} r_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = 2m_1 \dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 + m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 \tag{0.22}$$

Der Vergleich mit (0.17) zeigt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses verschwindet und für eine Konstante l die folgende Gleichung gelten muss.

$$m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1 = l \tag{0.23}$$

c) Schreiben Sie $\dot{\varphi}_1$ in Form von l und ersetzen Sie dann diesen Ausdruck in der Bewegungsgleichung für r_1. Diskutieren Sie das Verhalten von r_1 für verschiedene Werte des Drehimpulses. Zeigen Sie, dass es für einen festen Drehimpuls l einen kritischen Radius r_1^* gibt, in dem $\ddot{r}_1$ verschwindet.

Lösung: Wir stellen (0.21) um, um $\dot{\varphi}_1 = \frac{l}{m_1 r_1^2}$ zu erhalten.

Wenn wir diesen Ausdruck in Gleichung (0.19) einsetzen, erhalten wir

$$(m_1 + m_2)\ddot{r}_1 = \frac{l^2}{m_1 r_1^3} - m_2 g \tag{0.24}$$

Halten wir l auf einer Konstante fest, so gibt es einen kritischen Radius

$$r_1^* = \sqrt[3]{\frac{l^2}{m_1 m_2 g}}, \tag{0.25}$$

bei dem die radiale Beschleunigung verschwindet. Für größere Radien ist die radiale Beschleunigung psoitiv und die Masse wird sich in immer größer werdenden Orbits bewegen und umgekehrt für kleinere Radien. In diesem Fall würde die Masse schließlich das Loch in der Oberfläche erreichen.

d) Zeigen Sie, dass eine Trajektorie für die der Radius $r_1(t) = r_1^* = \text{const.}$ ist, die Bewegungsgleichung erfüllt. Erklären Sie, welche Kräfte ausgeglichen werden müssen, um zu dieser Gleichgewichtssituation zu führen.

Lösung: Wenn $r_1 = r_1^*$, dann verschwinden alle Ableitungen un die Gleichung (0.19) ist erfüllt. Das entspricht der Situtation, in der die Masse m_1 sich auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius um das Loch herum bewegt. Diese Gleichgewichtssituation ist dann erreicht, wenn die Gravitationskraft und die Zentripetalkraft ausbalanciert sind.

e) Nun bewegt sich die Masse auf dieser Gleichgewichtsbahn mit konstantem Radius r_1^* und wird durch eine kleine Störung $\epsilon(t)$ in radialer Richtung abgelenkt. Schreiben Sie $r(t) = r_1^* + \epsilon(t)$, und schreiben Sie die Bewegungsgleichung für r_1 in Bezug auf $\epsilon(t)$ neu. Lassen Sie alle Terme zweiter oder höherer Ordnung in ϵ fallen und zeigen Sie, dass die resultierende Trajektorie stabil ist und dass $r_1(t)$ sinusförmig um r_1^* oszillieren wird. Was ist die Frequenz dieser Oszillationen?

Lösung: Schreiben wir Gleichung (0.22) um, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{\epsilon} &= \frac{l^2}{m_1(r_1^* + \epsilon)^3} - m_2 g \\ &= \frac{l^2}{m_1 r_1^{*3}(1 + \frac{\epsilon}{r_1^*})^3} - m_2 g \\ &= \frac{l^2}{m_1 r_1^{*3}}(1 - 3\frac{\epsilon}{r_1^*} + ...) - m_2 g \end{aligned} \tag{0.26}$$

indem wir in ϵ um 0 herum entwickelt haben. Behalten wir nur die linearen Terme in ϵ und erinnern wir uns aus (0.23), dass $\frac{l^2}{m_1 r_1^{*3}} = m_2 g$, so erhalten wir

$$\ddot{\epsilon} = -\frac{3l^2}{m_1 r_1^{*4}(m_1 + m_2)}\epsilon. \tag{0.27}$$

Dies ist wieder einmal die Bewegungsgleichung eines einfachen harmonischen Oszillator, dessen Lösung eine Linearkombination aus Sinus- und Kosinustermin mit Frequenz $\sqrt{\frac{3l^2}{m_1 r_1^{*4}(m_1+m_2)}}$ ist. Damit ist das Orbit stabil unter kleinen Perturbationen, da die Trajektorie lediglich um den ursprünglichen Wert von r_1^* oszillieren würde.