Freie Universität Berlin

Analytische Mechanik

Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 8
Von Newton zu Lagrange

Abgabe bis: 19.06.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Lagrange Bewegungsgleichungen**[a3+b3+c2+d1+e2+f1 = 12 Punkte]

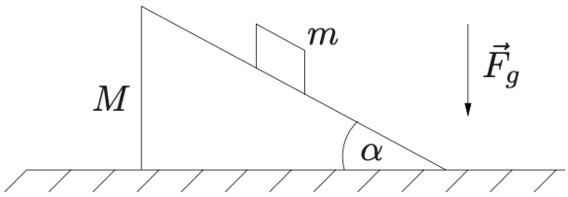

Abbildung 1: Der Klotz rutscht auf einem in der Ebene beweglichem Keil.

Ein Klotz der Masse m rutsche unter Einfluss der Gravitationskraft reibungsfrei auf einem Keil der Masse M mit Neigungswinkel α. Dieser Keil kann sich wiederum reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene bewegen.

a) Versuchen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen aufzustellen, indem Sie alle auftretenden Kräfte identifizieren und berücksichtigen, die auf den Klotz und den Keil wirken. Insbesondere üben natürlich der Klotz und der Keil gegenseitig Kräfte auf- einander aus. Mit dem Lagrange-Formalismus läßt sich dieses Problem so strukturieren, dass es sich ohne viel Nachdenken lösen läßt. Dies ist allerdings erst Inhalt von Aufgabenteil b). Hier sollen Sie zunächst versuchen, das Problem ohne den Formalismus anzugehen. *Hinweis: Benutzen Sie Ortsvektoren, die jeweils auf das rechte Ende des Keils und das rechts-untere Ende des Klotzes zeigen.*

b) Formulieren Sie die Tatsache, dass der Klotz auf dem Keil rutscht, als Zwangsbedingung. Welche Zwangsbedingungen gibt es noch? Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1. Art auf. Bestimmen Sie die Zwangskräfte, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten und das Ergebnis aus Aufgabenteil a) zu verifizieren.

   Im folgenden werden wir noch ein letztes mal die Bewegungsgleichungen dieses Klotz-Systemes herleiten, diesmal mit dem Lagrange-formalismus 2. Art.

c) Begründen sie, dass die Koordinaten der Körper entlang der Ebene q_1 (rechter Rand des Klotzes) und q_2 (rechte Spitze des Keils) als verallgemeinerte Koordinaten verwendet werden können.

d) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systemes auf.

e) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen, d.h. die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

   auf und verifizieren sie die Konsistenz mit den Ergebnissen aus a) und b).

f) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen sowohl der Klotz als auch der Keil ruhen und es gelte $x_m = 0$ und $x_M = x_0$. Lösen Sie die Bewegungsgleichung und beschreiben Sie die sich ergebende Bewegungen für $m \gg M$, bzw. $m \ll M$.

2. **Optimale Rutsche**[a4+b4+c5+d3 +e2= 18 Punkte]

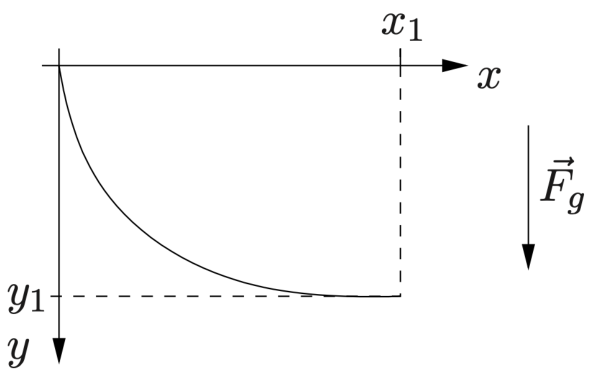

Abbildung 2: Rutsche zwischen den Punkten P_0, P_1 im Schwerefeld. Beachten Sie die Orientierung der Koordinatenachsen.

Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer Rutsche im Schwerefeld der Erde vom Punkt $P_0 = (0,0)$ zu einem Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$. Am Startpunkt P_0 sei das Teilchen in Ruhe. Die Form der Rutsche sei durch die Funktion $y(x)$ gegeben

a) Bestimmen Sie das Funktional $T[y, y'] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', y, x)dx$ für die Laufzeit von P_0 nach P_1 in Abhängigkeit von $y(x)$. Nutzen Sie dazu die Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$.

b) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die Funktion $y(x)$ her, die die Laufzeit minimiert. Betrachten Sie dazu die Variation der Laufzeit $\delta T = T[y+\delta y, (y+\delta y)'] - T[y, y']$ unter kleiner Variation $y \to y + \delta y$ der Bahnkurve. Unter der Variation wird der Rand der Bahnkurve festgehalten, also $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$.
Die Laufzeit ist minimal unter der Variation δy wenn $\delta T = 0$ gilt, also T stationär ist. Warum wird Stationarität von T nicht durch ein Maximum in T erfüllt?

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx} f(y, y') = 0 \text{ für } f(y, y') = \frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}}$$

mit $y' = \frac{dy}{dx}$. Können Sie schon anhand des zu minimierenden Funktionals ableiten, dass $f(y, y')$ für die optimale Rutsche erhalten sein muss?

d) Zeigen Sie, dass die optimale Bahnkurve über Funktionen $x = x(\theta) = R(\theta - \sin(\theta))$, $y = y(\theta) = R(1 - \cos(\theta))$ mit $0 \leq \theta \leq 2\pi$ parametrisiert werden kann. Bestimmen sie R für $y_1 = 0$. Was ist an dieser Kurve besonders?

e) Skizzieren Sie die optimale Bahnkurve.