Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 8
Von Newton zu Lagrange

Abgabe bis: 19.06.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Lagrange Bewegungsgleichungen**[a3+b3+c2+d1+e2+f1 = 12 Punkte]

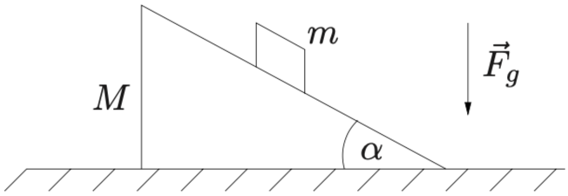

Abbildung 1: Der Klotz rutscht auf einem in der Ebene beweglichem Keil.

Ein Klotz der Masse m rutsche unter Einfluss der Gravitationskraft reibungsfrei auf einem Keil der Masse M mit Neigungswinkel α. Dieser Keil kann sich wiederum reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene bewegen.

a) Versuchen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen aufzustellen, indem Sie alle auftretenden Kräfte identifizieren und berücksichtigen, die auf den Klotz und den Keil wirken. Insbesondere üben natürlich der Klotz und der Keil gegenseitig Kräfte auf- einander aus. Mit dem Lagrange-Formalismus läßt sich dieses Problem so strukturieren, dass es sich ohne viel Nachdenken lösen läßt. Dies ist allerdings erst Inhalt von Aufgabenteil b). Hier sollen Sie zunächst versuchen, das Problem ohne den Formalismus anzugehen. *Hinweis: Benutzen Sie Ortsvektoren, die jeweils auf das rechte Ende des Keils und das rechts-untere Ende des Klotzes zeigen.*

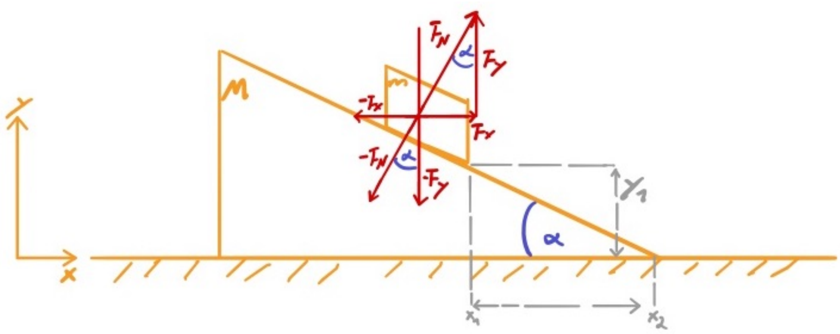

Abbildung 2: Das Klotz-Keil Systetm mit wirkenden Kräften und Variablen.

Lösung: Wir betrachten den Klotz in (x_1, y_1) mit $m_1 = m$ und den Keil in (x_2, y_2) mit $m_2 = M$ wie in Abb. 2 skizziert. Beachtet, dass die Bewegungsgleichungen invariant unter konstanten Verschiebungen der Koordinaten sind, so wählen wir das rechte Klotzende und die Keilspitze als Koordinaten. Die Bedingungen, dass der Keil in der horizontalen Ebene liegt und dass der Klotz auf dem Keil rutsch, können wir formulieren als

$$|y_1|/|x_2 - x_1| = tan(\alpha) \;\Leftrightarrow y_1 = (x_2 - x_1)\tan(\alpha), \tag{0.1}$$
$$y_2 = 0. \tag{0.2}$$

Beachte, dass in Gl. (0.1) mathematisch beide Vorzeichen erlaubt sind. Da wir aber $tan(\alpha) \geq 0$ haben, müssen wir das Vorzeichen so wählen, sodass $y_1 \propto -x_1$ gilt.

Mit Newtons 3. Regel stellen wir die Bewegungsgleichungen auf

$$m\ddot{x}_1 = F_x = F_N sin(\alpha) \;\Leftrightarrow F_N = \frac{m\ddot{x}_1}{sin(\alpha)} \tag{0.3}$$
$$M\ddot{x}_2 = -F_x = m\ddot{x}_1 \;\Leftrightarrow \ddot{x}_2 = -\frac{m}{M}\ddot{x}_1 \tag{0.4}$$
$$m\ddot{y}_1 = -mg + F_y = -mg + F_N cos(\alpha) = -mg + m\ddot{x}_1\cot(\alpha), \tag{0.5}$$
$$M\ddot{y}_2 = 0, \tag{0.6}$$

wo wir in der vorletzten Zeile Gl. (0.3) eingesetzt haben und $cot(x) = (tan(x))^{-1}$ haben. Wir leiten Gleichung (0.1) zweimal nach der Zeit ab und setzen sie gleich mit Gl. (0.5). Mit Gl. (0.4) gilt dann

$$\ddot{y}_1 = -g + \ddot{x}_1\cot(\alpha) = -\left(\frac{m}{M} + 1\right)\tan(\alpha)\ddot{x}_1 \tag{0.7}$$
$$\Leftrightarrow g = \left[\left(\frac{m}{M} + 1\right)\tan(\alpha) + \cot(\alpha)\right]\ddot{x}_1 \tag{0.8}$$
$$\Leftrightarrow \ddot{x}_1 = \frac{g\tan(\alpha)}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan^2(\alpha)}. \tag{0.9}$$

Damit sind nun alle Bewegungsgleichungen bestimmt.

b) Formulieren Sie die Tatsache, dass der Klotz auf dem Keil rutscht, als Zwangsbedingung. Welche Zwangsbedingungen gibt es noch? Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1. Art auf. Bestimmen Sie die Zwangskräfte, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten und das Ergebnis aus Aufgabenteil a) zu verifizieren.

Lösung: Wir haben zwei Zwangsbedingungen, einmal die Bedingung, dass der Klotz auf dem Keil rutscht, und einmal, dass der Keil in der Ebene $y = 0$ gleitet. Wir betrachten den verallgemeinterten Ortsvektor $\overline{r} = (x_1, y_1, x_2, y_2)^T$,

$$S_1(\overline{r}) = y_1 - (x_2 - x_1)\tan(\alpha), \tag{0.10}$$
$$S_2(\overline{r}) = y_2. \tag{0.11}$$

Mit dem Potential $U(\overline{r}) = mgy_1 + Mgy_2$ ergeben sich die Lagrangegleichungen 1. Art zu

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x}_1 \\ m\ddot{y}_1 \\ M\ddot{x}_2 \\ M\ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \tan(\alpha) \\ 1 \\ -\tan(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{0.12}$$

Die ersten beiden Zeilen erlauben uns zu identifizieren

$$\ddot{x}_2 = -\frac{m}{M}\ddot{x}_1, \;\lambda_1 = m\ddot{x}_1\cot(\alpha). \tag{0.13}$$

Leiten wir Gl. (0.10) wieder 2 mal nach der Zeit ab, und setzen die (0.13) ein, erhalten wir wie oben

$$\ddot{x}_1 = \frac{g\tan(\alpha)}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan^2(\alpha)}.$$

Indem wir λ_1 aus (0.13) und $\lambda_2 = Mg$ einsetzen, erhalten wir wieder alle Bewegungsgleichungen.

Im folgenden werden wir noch ein letztes mal die Bewegungsgleichungen dieses Klotz-Systemes herleiten, diesmal mit dem Lagrange-formalismus 2. Art.

c) Begründen sie, dass die Koordinaten der Körper entlang der Ebene q_1 (rechter Rand des Klotzes) und q_2 (rechte Spitze des Keils) als verallgemeinerte Koordinaten verwendet werden können.

Lösung: Wie bereits in der vorherigen Aufgabenteilen beschrieben, können y_1, y_2 als vollständig charakterisierte funktionen von q_1, q_2 geschrieben werden, sodass die Zwangsbedinungen immer erfüllt sind. In den Koordinaten q_1, q_2 wirken somit keine Zwangskräfte.

d) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systemes auf.

Lösung: Mit

$$\begin{aligned} x_1,\, x_2 &= q_1, q_2 \\ y_1 &= (x_2 - x_1)\tan(\alpha) \\ y_2 &= 0, \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\mathcal{L}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, q_1, q_2) = \frac{m}{2}(1+\tan^2(\alpha))\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(m\tan^2(\alpha)+M)\dot{q}_2^2 \tag{0.14}$$

$$- mg\tan^2(\alpha)\dot{q}_1\dot{q}_2 - mg\tan(\alpha)(q_2 - q_1). \tag{0.15}$$

e) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen, d.h. die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$$

auf und verifizieren sie die Konsistenz mit den Ergebnissen aus a) und b).

Lösung: Wir bemerken zuerst, dass

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2}$$

gilt. Mit den Euler-Lagrange Gleichungen haben wir damit auch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2}. \tag{0.16}$$

Wir haben

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1} = m(1+\tan^2(\alpha))\ddot{q}_1 - m\tan^2(\alpha)\ddot{q}_2 = mg\tan(\alpha) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1}, \tag{0.17}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2} = (m\tan^2(\alpha)+M)\ddot{q}_2 - m\tan^2(\alpha)\ddot{q}_1 = -mg\tan(\alpha) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2},$$

Indem wir in Gleichung (0.16) einsetzen, erhalten wir hier wieder

$$m\ddot{q}_1 = -M\ddot{q}_2. \tag{0.18}$$

Mit (0.17) erhalten wir dann wiederrum

$$\ddot{q}_1 = \frac{g\tan(\alpha)}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan^2(\alpha)}.$$

f) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen sowohl der Klotz als auch der Keil ruhen und es gelte $x_m = 0$ und $x_M = x_0$. Lösen Sie die Bewegungsgleichung und beschreiben Sie die sich ergebende Bewegungen für $m \gg M$, bzw. $m \ll M$.

Lösung: Die Bewegungsgleichungen integrieren sich mit den Anfangsbedingungen zu

$$\begin{aligned}
q_1(t) &= \frac{1}{2}\frac{g\tan(\alpha)}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan^2(\alpha)}t^2 \\
q_2(t) &= x_0 - \frac{1}{2}\frac{g\tan(\alpha)}{\frac{M}{m} + \left(1 + \frac{M}{m}\right)\tan^2(\alpha)}t^2.
\end{aligned}$$

Dies sind beschleunigte Bewegungen. Für $m \ll M$ erhalten wir zudem

$$\begin{aligned}
q_1(t) &\approx \frac{g}{4}sin(2\alpha)t^2, \\
q_2(t) &\approx x_0 - \frac{gm}{4M}\sin(2\alpha)t^2.
\end{aligned}$$

und für $M \ll m$:

$$\begin{aligned}
q_1(t) &\approx \frac{Mg}{2m}\cot(\alpha)t^2, \\
q_2(t) &\approx x_0 - \frac{g}{2}\cot(\alpha)t^2.
\end{aligned}$$

In den obigen Approximationen benutzen wir, dass $\frac{\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$ gilt. Wir sehen, dass im Grenzwert $\frac{m}{M} \to 0$ gilt

$$\begin{aligned}
q_1(t) &\xrightarrow{\frac{m}{M}\to 0} \frac{g}{4}sin(2\alpha)t^2, \\
q_2(t) &\xrightarrow{\frac{m}{M}\to 0} x_0 = const.
\end{aligned}$$

und für $\frac{M}{m} \to 0$:

$$\begin{aligned}
q_1(t) &\xrightarrow{\frac{M}{m}\to 0} 0, \\
q_2(t) &\xrightarrow{\frac{M}{m}\to 0} x_0 - \frac{g}{2}\cot(\alpha)t^2.
\end{aligned}$$

2. **Optimale Rutsche**[a4+b4+c5+d3 +e2= 18 Punkte]

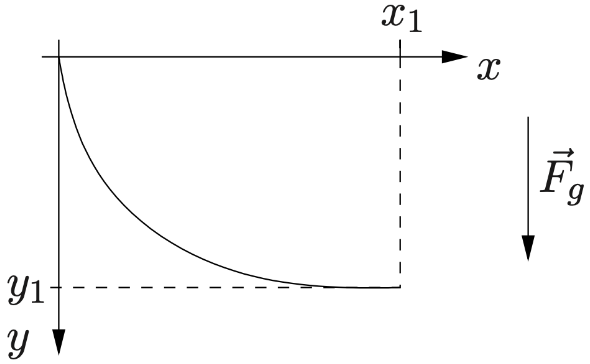

Abbildung 3: Rutsche zwischen den Punkten P_0, P_1 im Schwerefeld. Beachten Sie die Orientierung der Koordinatenachsen.

Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer Rutsche im Schwerefeld der Erde vom Punkt $P_0 = (0, 0)$ zu einem Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$. Am Startpunkt P_0 sei das Teilchen in Ruhe. Die Form der Rutsche sei durch die Funktion $y(x)$ gegeben

a) Bestimmen Sie das Funktional $T[y, y'] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', y, x)dx$ für die Laufzeit von P_0 nach P_1 in Abhängigkeit von $y(x)$. Nutzen Sie dazu die Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$.

Lösung: Unter Beachtung der Orientierung des Koordinatensystemes haben wir $E_{kin} = \frac{m}{2}v^2$ und $E_{pot} = -mgy$. Die Energie des Systemes is offensichtlich erhalten, somit gilt

$$v = \sqrt{2gy}, \tag{0.19}$$

wo die auch gilt $v = \frac{ds}{dt}$. Wir drücken das Linienelement ds entlang der Kurve über die $x-$Koordinate aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1 + y'^2)dx^2 \tag{0.20}$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{1 + y'^2}dx. \tag{0.21}$$

Zusammengefasst erhalten wir für das Zeitelement damit

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}dx. \tag{0.22}$$

Die Gesamte Laufzeit ist also über das Funktional

$$T[y, y'] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \underbrace{\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}}_{F(y,y')} dx \tag{0.23}$$

gegeben.

b) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die Funktion $y(x)$ her, die die Laufzeit minimiert. Betrachten Sie dazu die Variation der Laufzeit $\delta T = T[y+\delta y, (y+\delta y)'] - T[y, y']$ unter kleiner Variation $y \to y + \delta y$ der Bahnkurve. Unter der Variation wird der Rand der Bahnkurve festgehalten, also $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$.
Die Laufzeit ist minimal unter der Variation δy wenn $\delta T = 0$ gilt, also T stationär ist. Warum wird Stationarität von T nicht durch ein Maximum in T erfüllt?

Lösung: Es gilt allgemein

$$
\begin{aligned}
\delta T &= \delta \int_{x_0}^{x_1} F(y', y, x) dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx,
\end{aligned}
$$

wo wir in der letzten Zeile partielle Integration und $\delta y(x_0) = \delta y(y_1) = 0$ benutzt haben. Da nun $\delta T = 0$ für beliebige δy gelten soll, erhalten wir die Euler-Lagrange Gleichung

$$
\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}. \tag{0.24}
$$

Dasjenige $y(x)$, welches diese ELG erfüllt minimiert die Laufzeit, da es kein endliches Maximum gibt.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

$$
\frac{d}{dx} f(y, y') = 0 \quad \text{für} \quad f(y, y') = \frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}}
$$

mit $y' = \frac{dy}{dx}$. Können Sie schon anhand des zu minimierenden Funktionals ableiten, dass $f(y, y')$ für die optimale Rutsche erhalten sein muss?

Lösung: Zur Wiederholung: Betrachten wir die totale $x-$Ableitung der Funktion $F(y', y, x)$ wie oben, dann haben wir

$$
\frac{d}{dx} F = \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{0.25}
$$

Ausserdem gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) &= \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' && (0.26) \\
&= \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' && (0.27)
\end{aligned}
$$

wo wir im Übergang zur letzten Zeile die Euler-Lagrange Gleichung benutzt haben. Fassen wir (0.25) und (0.26) zusammen, haben wir also

$$
\frac{d}{dx} \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) = \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{0.28}
$$

Da nun aber die Funktion $F(y, y')$ in (0.23) nicht explizit von der Zeit abhängt, gilt

$$
\frac{d}{dx} f(y, y') = 0 \tag{0.29}
$$

mit $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$,

$$
f(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}}. \tag{0.30}
$$

Im Lagrange Formalismus, also wenn F die Lagrangefunktion ist, impliziert die analoge Herleitung in Systemen mit explizit zeitunabhängiger Lagrangefunktion dass die Energie $E = T + V$ erhalten ist.

d) Zeigen Sie, dass die optimale Bahnkurve über Funktionen $x = x(\theta) = R(\theta - \sin(\theta))$, $y = y(\theta) = R(1 - \cos(\theta))$ mit $0 \leq \theta \leq 2\pi$ parametrisiert werden kann. Bestimmen sie R für $y_1 = 0$. Was ist an dieser Kurve besonders?

Lösung: Da f aus der vorherigen Unteraufgabe konstant in x ist, haben wir auch

$$y(1 + y'^2) = 2R = const. \tag{0.31}$$

Oder equivalent

$$y'^2 - \frac{2R}{y} = -1. \tag{0.32}$$

Wir sehen, dass $x(\theta), y(\theta)$ diese Gleichung Lösen, mit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}. \tag{0.33}$$

Da $P_0 = (0, 0)^T$, haben wir $\theta_0 = 0$. θ_1 ist implizit über folgende Gleichungen gegeben

$$x_1 = R(\theta_1 - \sin\theta_1)$$
$$y_1 = R(1 - \cos\theta_1).$$

Im Fall $y_1 = 0$ erhalten wir eine nichttriviale Lösung für $\theta_1 = 2\pi$, eingesetzt in den Ausdruck für x_1 ergibt das $R = \frac{x_1}{2\pi}$. Im Spezialfall $y_1 = 0$ ist die Kurve symmetrisch um ihr Minimum bei $\theta = \pi$ und $x(\pi) = \frac{x_1}{2}$. Die Symmetrie sieht man insbesondere da hier $\frac{dy}{dx}(2\pi - \theta) = -\frac{dy}{dx}(\theta)$ gilt.

e) Skizzieren Sie die optimale Bahnkurve.

Lösung: Die erhaltene Bahnkurve heisst Brachiostrochone. Ihre Herleitung von Johann Bernoulli 1969 wird als Geburtsstunde der Variationsrechnung angesehen (`https://de.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone`).

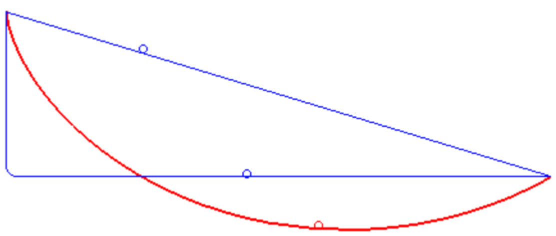

Abbildung 4: Die Brachiostrochrone.