Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

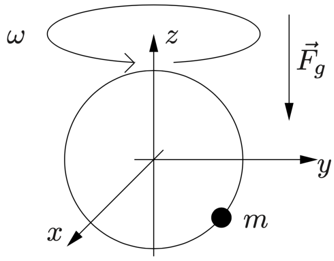
Übungsblatt 9
Équations de deuxième espèce

Abgabe bis: 26.06.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Perle auf einem rotierenden Reif** $[4 + 2 + 6 = 12$ Punkte$]$

   Wir betrachten eine Glasperle der Masse m, deren als reibungsfrei angenommene Bewegung entlang eines masselosen Drahtreifs mit Radius R eingeschränkt ist. Der Drahtreif befindet sich in einer vertikalen Ebene und rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine vertikale Symmetrieachse, die z-Achse. Die Gravitationskraft sei die einzige Kraft, die auf die Glasperle wirkt.



   a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in geeigneten generalisierten Koordinaten auf und leiten Sie davon die Bewegungsgleichungen für die Perle ab.

   b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslagen der Perle. Dies sind die Positionen der Perle auf dem Reif, an denen keine Kraft auf die Perle entlang des Reifs wirkt.

   c) Identifizieren Sie nun die stabilen und instabilen Gleichgewichtslagen. Parametrisieren Sie dazu kleine Auslenkungen der Perle um ihre Gleichgewichtslage und bestimmen Sie, in welchen Lagen stabile Oszillationen der Bewegung um die Gleichgewichtslage auftreten.

2. **Mechanische Eichtransformation** [4 Punkte]

   Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ eines Systems hänge von den verallgemeinerten Koordinaten q_i, den entsprechenden Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$, $i = 1, \dots, N$, und der Zeit ab. Zeigen Sie durch Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichungen, dass die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}'(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) = \mathcal{L}(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) + \frac{d}{dt} f(q_i, t) \tag{0.1}$$

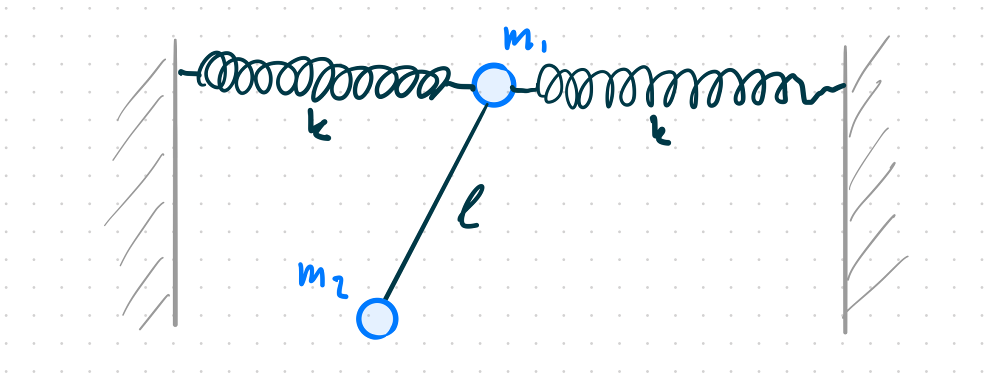
   zu den gleichen Bewegungsgleichungen wie $\mathcal{L}(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ führt. Das Addieren einer totalen Zeitableitung wird auch als mechanische Eichtransformation bezeichnet.

3. **Pendel an Federn** $[6 + 2 + 1 + 5 = 14$ Punkte$]$

   In dieser Aufgabe wollen wir die Dynamik eines recht komplizierten Systems mithilfe des Lagrange-Formalismus berechnen. Wir betrachten zwei Punktmassen m_1 und m_2 in zwei Dimensionen. Die Masse m_1 ist mit zwei Federn mit gleicher Federkonstante

k zwischen zwei Wänden befestigt. Die Federn sind so konstruiert, dass sie nur in die Richtung senkrecht zu den Wänden ausgelenkt werden können.

An dieser Masse befestigen wir einen Faden der Länge l (kleiner als der Abstand zur Wand), an den wir die Masse m_2 hängen. Dieser Faden bleibt stets straff. Auf die Massen wirke die Schwerkraft senkrecht zur Aufhängung der Masse m_1.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten auf.

Nun wollen wir die Bewegungsgleichungen genauer verstehen. Dazu nehmen wir an, dass der Auslenkungswinkel des Pendels klein ist.

b) Zeigen Sie, dass sich unter diesem Umstand, die Bewegungsgleichungen schreiben lassen als

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{q} + 2kq &= m_2 l(\dot{q}'^2 q' - \ddot{q}') \\ l\ddot{q}' + gq' &= -\ddot{q},\end{aligned}$$

wobei q die eine und q' die andere verallgemeinerte Koordinate sind.

c) Welche Form der Bewegung wird durch diese Gleichungen beschrieben?

d) Lösen Sie die gekoppelte Differentialgleichung numerisch mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{x}(0) = 0$ und $x(0) = 0.1$, sowie der Wahl der Konstanten $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k = 1$, $l = 2$ von $t = 0$ bis $t = 10$. Stellen Sie das Ergebnis im Phasenraum $(x, \dot{x})$, sowie $(\varphi, \dot{\varphi})$, sowie in Abhängigkeit von der Zeit dar.