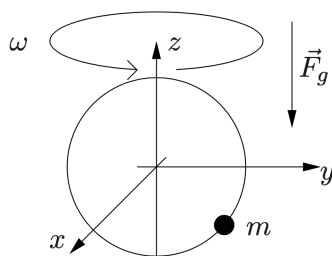


Übungsblatt 9
Équations de deuxième espèce

Abgabe bis: 26.06.2020 um 12:00 Uhr

1. Perle auf einem rotierenden Reif [4 + 2 + 6 = 12 Punkte]

Wir betrachten eine Glasperle der Masse m , deren als reibungsfrei angenommene Bewegung entlang eines masselosen Drahtreifs mit Radius R eingeschränkt ist. Der Drahtreif befindet sich in einer vertikalen Ebene und rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine vertikale Symmetrieachse, die z -Achse. Die Gravitationskraft sei die einzige Kraft, die auf die Glasperle wirkt.



- a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in geeigneten generalisierten Koordinaten auf und leiten Sie davon die Bewegungsgleichungen für die Perle ab.

Lösung: Wegen der sphärischen Symmetrie des Problems ist es natürlich in Kugelkoordinaten zu beginnen. Darüber hinaus bemerken wir, dass der Radius r der Perle fixiert ist durch die Zwangsbedingung, dass die Perle sich auf dem Reif bewegt (also $r(t) = R$). Außerdem ist der azimuthale Winkel ϕ fixiert durch die Zwangsbedingung konstanter Winkelgeschwindigkeit (also $\phi(t) = \omega t + \phi_0$). Damit kann die Position der Perle vollständig durch den Polarwinkel θ charakterisiert werden, der also eine geeignete generalisierte Koordinate darstellt. Wenn wir θ von der positive z -Achse aus messen, erhalten wir

$$\begin{aligned}x(\theta, t) &= r \sin(\theta) \cos(\phi) = R \sin(\theta) \cos(\omega t + \phi_0), \\y(\theta, t) &= r \sin(\theta) \sin(\phi) = R \sin(\theta) \sin(\omega t + \phi_0), \\z(\theta, t) &= r \cos(\theta) = R \cos(\theta).\end{aligned}$$

Um die kinetische Energie in der generalisierten Koordinate auszudrücken, benötigen wir außerdem die ersten Ableitungen, die wir mit $\phi := \omega t + \phi_0$ bestimmen können:

$$\begin{aligned}\dot{x}(\theta, \dot{\theta}, t) &= R[\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\omega t + \phi_0) - \omega \sin(\theta) \sin(\omega t + \phi_0)], \\ \dot{y}(\theta, \dot{\theta}, t) &= R[\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\omega t + \phi_0) + \omega \sin(\theta) \cos(\omega t + \phi_0)], \\ \dot{z}(\theta, \dot{\theta}, t) &= -R\dot{\theta} \sin(\theta).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) &= T - V \\
 &= \frac{1}{2}m|v|^2 - mgz \\
 &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgR \cos(\theta) \\
 &= \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2(\theta)) - mgR \cos(\theta),
 \end{aligned} \tag{0.1}$$

aus der wir die Bewegungsgleichungen wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \\
 mR^2 \ddot{\theta} &= mR^2 \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + mgR \sin(\theta) \\
 \ddot{\theta} &= \sin(\theta) \left[\omega^2 \cos(\theta) + \frac{g}{R} \right]
 \end{aligned} \tag{0.2}$$

b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslagen der Perle. Dies sind die Positionen der Perle auf dem Reif, an denen keine Kraft auf die Perle entlang des Reifs wirkt.

Lösung: Dass keine Kraft entlang des Drahtes wirkt bedeutet, dass $\ddot{\theta} = 0$. Wir suchen also alle Werte $\theta = \theta^*$ für die $\ddot{\theta} = 0$. Aus Gleichung (0.2) sehen wir, dass dies auftritt, wenn

$$\sin(\theta) \left[\omega^2 \cos(\theta) + \frac{g}{R} \right] = 0. \tag{0.3}$$

Damit sehen wir, dass wir für alle Werte von ω die beiden folgenden Gleichgewichtspunkte erhalten

$$\begin{aligned}
 \theta_1^* &= \pi, & (\text{bottom of the hoop}) \\
 \theta_2^* &= 0, & (\text{top of the hoop})
 \end{aligned}$$

Wenn $\omega^2 \geq g/R$, dann erhalten wir den zusätzlichen Gleichgewichtspunkt

$$\theta_3^* = \arccos \left(-\frac{g}{\omega^2 R} \right). \tag{0.4}$$

c) Identifizieren Sie nun die stabilen und instabilen Gleichgewichtslagen. Parametrisieren Sie dazu kleine Auslenkungen der Perle um ihre Gleichgewichtslage und bestimmen Sie, in welchen Lagen stabile Oszillationen der Bewegung um die Gleichgewichtslage auftreten.

Lösung: Gegeben eine passende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, einen Punkt x^* und eine kleine Auslenkung ϵ erhalten wir die Taylorentwicklung erster Ordnung

$$f(x^* + \epsilon) = f(x^*) + f'(x^*)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{0.5}$$

Diese Entwicklung können wir nun verwenden um zu sehen, dass in erster Ordnung in ϵ

$$\sin(\theta^* + \epsilon) \approx \sin(\theta^*) + \cos(\theta^*)\epsilon, \tag{0.6}$$

$$\cos(\theta^* + \epsilon) \approx \cos(\theta^*) - \sin(\theta^*)\epsilon. \tag{0.7}$$

Um die Stabilität eines Gleichgewichtspunktes θ_i^* zu bestimmen, setzen wir nun $\theta = \theta_i^* + \epsilon(t)$ und substituieren dies in Gleichung (0.2) mit den Approximationen aus den Gleichungen (0.6) und (0.7). Für den Gleichgewichtspunkt $\theta_1^* = \pi$ (also den tiefsten Punkt des Reifs) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\ddot{\epsilon} &= -\epsilon \left(-\omega^2 + \frac{g}{R} \right) \\ &= \epsilon \left(\omega^2 - \frac{g}{R} \right) \\ &:= \omega_0^2 \epsilon\end{aligned}\tag{0.8}$$

wo wir $\omega_0^2 := \omega^2 - g/R$ definiert haben. Nun stellen wir fest, dass wenn $\omega^2 < g/R$ dann gilt $\omega_0^2 < 0$ und damit erhalten wir

$$\ddot{\epsilon} = -|\omega_0^2| \epsilon.\tag{0.9}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit Oszillationsfrequenz $\sqrt{|\omega_0^2|}$. Damit sehen wir, dass der Gleichgewichtspunkt θ_1^* stabil ist, solange $\omega^2 < g/R$. Wenn andererseits $\omega^2 \geq g/R$, dann ist $\omega_0^2 \geq 0$. Aus Gleichung (0.8) ist dann auch klar, dass wir keine harmonische Lösung der Differentialgleichung erhalten, sondern eine exponentielle. Der Gleichgewichtspunkt θ_1^* ist also instabil für $\omega^2 > g/R$. Lassen Sie uns nun den Gleichgewichtspunkt $\theta_2^* = 0$ (also das obere Ende des Reifs) betrachten. Mit derselben Methode erhalten wir dann

$$\ddot{\epsilon} = \epsilon \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right).\tag{0.10}$$

Da $(\omega^2 + g/R) > 0$ für alle Werte von ω , sehen wir, dass dieser Gleichgewichtspunkt instabil ist. Es gibt also keine Werte von ω , die zu einer einfachen oszillierenden Bewegung führen. Zuguterletzt nehmen wir an, dass $\omega^2 \geq g/R$ und betrachten den Gleichgewichtspunkt θ_3^* . In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned}\ddot{\epsilon} &= \left(\sin(\theta_3^*) - \frac{g}{\omega^2 R} \epsilon \right) \left(\omega^2 \left[-\frac{g}{\omega^2 R} - \sin(\theta_3^*) \epsilon \right] + \frac{g}{R} \right) \\ &= \left(\sin(\theta_3^*) - \frac{g}{\omega^2 R} \epsilon \right) (-\omega^2 \sin(\theta_3^*) \epsilon) \\ &= -\omega^2 \sin^2(\theta_3^*) \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &\approx -\omega^2 \sin^2(\theta_3^*) \epsilon \\ &:= -\alpha^2 \epsilon\end{aligned}\tag{0.11}$$

woraus wir sofort erkennen, dass dieser Gleichgewichtspunkt für alle Werte von $\omega \geq g/R$ stabil ist mit Frequenz $\alpha = \sqrt{\omega^2 \sin^2(\theta_3^*)}$. Wir fassen die Situation wie folgt zusammen:

	$\theta_1^* = \pi$ (unten)	$\theta_2^* = 0$ (oben)	$\theta_3^* = \arccos(-\frac{g}{\omega^2 R})$
$\omega^2 < g/R$	stabil	instabil	existiert nicht
$\omega^2 \geq g/R$	instabil	instabil	stabil

2. Mechanische Eichtransformation [4 Punkte]

Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ eines Systems hänge von den verallgemeinerten Koordinaten q_i , den entsprechenden Geschwindigkeiten \dot{q}_i , $i = 1, \dots, N$, und der Zeit ab. Zeigen Sie durch Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichungen, dass die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}'(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} f(q_i, t)\tag{0.12}$$

zu den gleichen Bewegungsgleichungen wie $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ führt. Das Addieren einer totalen Zeitableitung wird auch als mechanische Eichtransformation bezeichnet.

Lösung: Wir schreiben die totale Zeitableitung mit den jeweilig partiellen Ableitungen aus, sodass wir haben

$$\mathcal{L}'(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (0.13)$$

Die beiden Seiten der Lagrangefunktion für $\mathcal{L}'(q_i, \dot{q}_i, t)$ lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}, \quad (0.14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (0.15)$$

indem wir benutzen, dass die totale Zeitableitung $\frac{d}{dt}$ und partielle Ortsableitung $\frac{\partial}{\partial q_i}$ vertauschen. Damit gilt offensichtlich

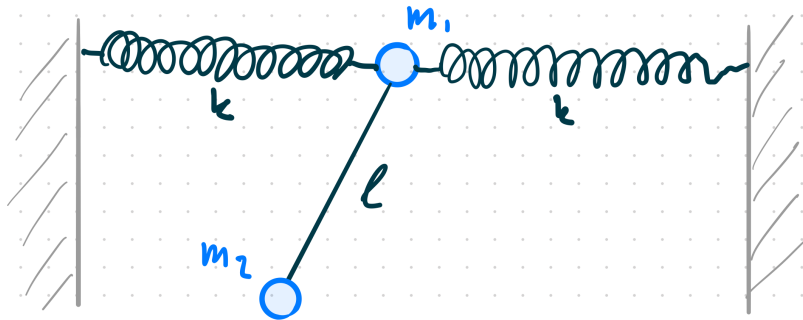
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad (0.16)$$

womit die Euler-Lagrange Gleichungen invariant bleiben.

3. Pendel an Federn [6 + 2 + 1 + 5 = 14 Punkte]

In dieser Aufgabe wollen wir die Dynamik eines recht komplizierten Systems mithilfe des Lagrange-Formalismus berechnen. Wir betrachten zwei Punktmassen m_1 und m_2 in zwei Dimensionen. Die Masse m_1 ist mit zwei Federn mit gleicher Federkonstante k zwischen zwei Wänden befestigt. Die Federn sind so konstruiert, dass sie nur in die Richtung senkrecht zu den Wänden ausgelenkt werden können.

An dieser Masse befestigen wir einen Faden der Länge l (kleiner als der Abstand zur Wand), an den wir die Masse m_2 hängen. Dieser Faden bleibt stets straff. Auf die Massen wirke die Schwerkraft senkrecht zur Aufhängung der Masse m_1 .



- a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten auf.

Lösung: Wir legen unser Koordinatensystem so, dass die x -Achse parallel zur Auslenkungsrichtung der Federn liegt und die z -Achse senkrecht nach oben zeigt. Dann können wir die Ortskoordinaten \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 der beiden Massen sowie ihre Zeitableitung mit Hilfe der Auslenkung x der ersten Masse und der Winkelauslenkung φ der zweiten Masse aus ihrer Ruheposition schreiben als

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x + l \sin \varphi \\ -l \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (0.17)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} + \dot{\varphi} l \cos \varphi \\ \dot{\varphi} l \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (0.18)$$

Wir können also die Koordinaten $x =: q$ und $\varphi =: q'$ als verallgemeinerte Koordinaten wählen.

Um die Lagrangefunktion $L = T - U$ aufzustellen, müssen wir nun die kinetische Energie

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi), \quad (0.19)$$

sowie die potentielle Energie U berechnen.

Letztere stellt sich zusammen aus der in den Federn gespeicherten potentiellen Energie

$$U_1 = \frac{k}{2}x^2 + \frac{k}{2}x^2 = kx^2, \quad (0.20)$$

sowie der potentiellen Energie des Pendels im homogenen Gravitationsfeld

$$U_2 = -m_2gl\cos\varphi. \quad (0.21)$$

Damit erhalten wir

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + m_2l(\dot{x}\dot{\varphi} + g)\cos\varphi - kx^2. \quad (0.22)$$

Nun können wir die Bewegungsgleichungen bestimmen. Aus den Euler-Lagrange Gleichungen für x erhalten wir

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2kx \quad (0.23)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}((m_1 + m_2)\dot{x} + m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi) \quad (0.24)$$

$$= (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi), \quad (0.25)$$

sodass

$$(I) \quad 2kx + (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = 0. \quad (0.26)$$

Aus den Gleichungen für φ erhalten wir

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2l(\dot{x}\dot{\varphi} + g)\sin\varphi \quad (0.27)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(m_2l^2\dot{\varphi} + m_2l\dot{x}\cos\varphi) \quad (0.28)$$

$$= m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l(\ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi), \quad (0.29)$$

sodass

$$(II) \quad g\sin\varphi + l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi = 0. \quad (0.30)$$

Nun wollen wir die Bewegungsgleichungen genauer verstehen. Dazu nehmen wir an, dass der Auslenkungswinkel des Pendels klein ist.

b) Zeigen Sie, dass sich unter diesem Umstand, die Bewegungsgleichungen schreiben lassen als

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} + 2kq = m_2l(\dot{q}'^2q' - \ddot{q}') \\ l\ddot{q}' + gq' = -\ddot{q},$$

wobei q die eine und q' die andere verallgemeinerte Koordinate sind.

Lösung: Für kleine Winkelauslenkungen des Pendels können wir $\sin \varphi \approx \varphi$ und $\cos \varphi \approx 1$ approximieren und erhalten die Gleichungen.

c) Welche Form der Bewegung wird durch diese Gleichungen beschrieben?

Lösung: Die Bewegung ist die eines harmonischen Oszillators, der von der jeweils anderen Auslenkung getrieben wird.

d) Lösen Sie die gekoppelte Differentialgleichung numerisch mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{x}(0) = 0$ und $x(0) = 0.1$, sowie der Wahl der Konstanten $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k = 1$, $l = 2$ von $t = 0$ bis $t = 10$. Stellen Sie das Ergebnis im Phasenraum (x, \dot{x}) , sowie $(\varphi, \dot{\varphi})$, sowie in Abhängigkeit von der Zeit dar.

Lösung: Wir verwenden Mathematica:

In[121]:=

```

l = 1; g = 9.8; m1 = 1; m2 = 1; k = 1;
x0 = .1; tmax = 10;
s =
NDSolve[{l φ''[t] + g φ[t] == -x''[t],
(m1 + m2) x''[t] + 2 k x[t] == m2 l (φ'[t]^2 φ[t] - φ''[t]),
φ[0] == φ'[0] == x'[0] == 0, x[0] == x0}, {φ, x}, {t, 0, tmax}]

ParametricPlot[{φ[t], φ'[t]} /. s, {t, 0, tmax},
AxesLabel → {φ, φ'}]
ParametricPlot[{x[t], x'[t]} /. s, {t, 0, tmax},
AxesLabel → {x, x'}]

Plot[{x[t] /. s, φ[t] /. s}, {t, 0, tmax}, AxesLabel → {t},
PlotLabels → {x[t], φ[t]}]

```

Damit erhalten wir

