Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 10
Erhaltungsgrößen

Abgabe bis: 03.07.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Erhaltungsgrößen im Zentralpotential** [2+1+2+5+4+1+2=15 Punkte]
In dieser Aufgabe betrachten wir ein Teilchen der Masse m im Zentralpotential $U(\mathbf{r}) = -\frac{k}{|\mathbf{r}|},\ k > 0$.

   a) Betrachten Sie zunächste eine infinitesimale Drehung um eine Achse $\mathbf{n}$:
$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}^* = \mathbf{r} + (\mathbf{n} \times \mathbf{r})\epsilon, \tag{0.1}$$
und zeigen Sie für eine allgemeine Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \to \mathcal{L}^* = \mathcal{L}(\mathbf{r}^*(\epsilon), \dot{\mathbf{r}}^*(\epsilon))$ den folgenden Zusammenhang
$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}). \tag{0.2}$$

   b) Zeigen Sie mit (0.2), dass im Zentralpotential der Drehimpuls erhalten ist.

   c) Zeigen Sie direkt mithilfe der Euler-Lagrange Gleichungen, dass der Drehimpuls eines isotropischen Systems erhalten ist.
Hinweis: Benutzen Sie dazu Zylinderkoordinaten

   d) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion des Teilchens im Zentralpotential unter den drei infinitesimalen Koordinatentransformationen ($j = 1,\ 2,\ 3$)
$$x_i \to x_i^*(\epsilon, j) = x_i + \epsilon\left[\dot{x}_i x_j - \frac{1}{2}x_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\sum_k x_k\dot{x}_k\right] \tag{0.3}$$
für die kartesischen Komponenten des Ortsvektors ($i = 1,\ 2,\ 3$) bis auf eine totale Zeitableitung invariant ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Bewegungsgleichungen.

   e) Zeigen Sie, dass die über das Noethertheorem mit den Koordinatentransformationen verknüpften Erhaltungsgrößen die Komponenten des Vektors
$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L} - k\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \tag{0.4}$$
sind, wobei $\mathbf{L}$ den Drehimpuls des Teilchens bezeichnet.

   f) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion des Teilchens im Zentralpotential und zeigen Sie mithilfe der Poisson-Klammer dass die Komponenten des Drehimpulses erhalten sind.

   g) Zeigen Sie mithilfe der Jacobi-Identität, dass die Poisson-Klammer $\{A,\ B\}$ zweier Erhaltungsgrößen $A,\ B$ eines Teilchens eine Erhaltungsgröße ist.

2. **Legendre Transformation** [$2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11$ Punkte]
Die Hamiltonsche Mechanik und die Lagrange Mechanik ergeben sich aus einander, indem die Freiheitsgrade des Systems entweder mit $(q, \dot{q})$ oder (q, p) parametrisiert werden. Dadurch wird die Rolle der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ durch die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ besetzt und umgekehrt.

Die Dualitätsbeziehung zwischen $\dot{q}$ und p und damit L und H beruht auf einem allgemeineren mathematischen Prinzip der Legendre-Dualität (oder noch allgemeiner der Fenchel-Dualität). Diese Dualität ist eines der wichtigsten Konzepte der konvexen Analysis und Theorie der konvexen Optimierung. Neben der Mechanik spielt die Legendre-Dualität auch im Übergang zwischen unterschiedlichen Beschreibungen der Thermodynamik eine wichtige Rolle. Hier wollen wir uns einmal genauer anschauen, was dahinter steckt.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnet man als *konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt, dass $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$. Gilt diese Bedingung als strikte Ungleichung für $\lambda \in (0,1)$ und $x_1 \neq x_2$ so nennt man f *streng konvex.*

a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ eine konvexe Funktion ist.
(Zusatzaufgabe: Für multidimensionale quadratische Funktionen gilt allgemeiner: Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to R$, $f(x) = \frac{1}{2} x \cdot Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ einer symmetrischen, positiv-definiten Matrix ist konvex. Zeigen Sie auch dies.)

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Legendre-transformierte* oder *konvex-konjugierte* Funktion

$$f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \quad x^* \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(x \cdot x^* - f(x)\right).$$

b) Zeigen Sie, dass auch f^* eine konvexe Funktion ist.

c) Sei f streng konvex und stetig differenzierbar. Argumentieren Sie, dass dann

$$f^*(x^*) = x^* \cdot \tilde{x} - F(\tilde{x}),$$

wobei $\tilde{x}$ durch die Bedingung $x^* = \nabla f(\tilde{x})$ eindeutig festgelegt ist.

d) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Legendre-transformierten Funktion f^* einer streng konvexen, differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Hinweis: Betrachten Sie dazu die Tangenten an dem Graphen der Funktion.*

e) Zeigen Sie, dass die Legendre-Transformation für stetig differenzierbare, strikt konvexe Funktionen eine Involution ist, d.h. es gilt $(f^*)^*(x) = f(x)$.

f) Berechnen Sie die Legendre-Transformierte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4/4 - x^2/2$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3/3 + x^2/2$.