Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

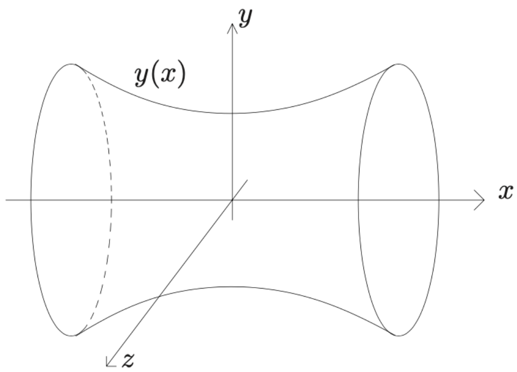
Übungsblatt 11
Variation

Abgabe bis: 10.07.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Seifenhaut**[a4+b4+c4= 12 Punkte]

   Zwischen zwei Kreisringen mit Radius R, die bei $x = -x_0$ und $x = x_0$ zentriert in der $yz-$Ebene liegen, sei eine Seifenhaut gespannt (s. Skizze). Aufgrund der Oberflächenspannung wird sich die Seifenhaut so ausbilden, dass die entstehende Fläche minimal ist. Das gesamte Problem ist rotations- symmetrisch um die x-Achse, so dass sich die Seifenhaut durch eine Funktion $y(x)$ charakterisieren lässt.



   a) Bestimmen Sie das Funktional $F[y, y', x]$, das die Fläche der Seifenhaut als Funktion von $y(x)$ angibt.

   b) Bestimmen Sie die Funktion $y(x)$ entlang derer sich die Minimalfläche ausbildet.

      Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Problem in der Form

      $$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \tag{0.1}$$

      geschrieben werden kann.

   c) Was passiert, wenn man die Kreisringe beginnend bei $x_0 = 0$ langsam auseinander zieht, d.h. x_0 vergrößert? Existiert für beliebige x_0 eine stabile Minimalfläche?
      Hinweis: Eine der in Aufgabenteil b) auftretenden Integrationskonstanten ist durch eine transzendente Gleichung festgelegt. Untersuchen Sie diese numerisch.

2. **Kanonische Transformationen**[a4+b2+c3+d2+e2= 13 Punkte]

   Wir betrachten ein System beschrieben durch die Hamiltonfunktion:

   $$H = \frac{1}{2}p^2q^4 + \frac{1}{2}\frac{1}{q^2}. \tag{0.2}$$

   Für Konstanten $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, A \neq 0$ und γ führen wir die folgende Koordinatentransformation durch:

   $$q = P^\alpha, \qquad p = AQ^\beta P^\gamma. \tag{0.3}$$

a) Bestimmen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für $\dot{q}$ und $\dot{p}$. Drücken sie diese durch $Q, P, \dot{Q}$ und $\dot{P}$ aus und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für Q und P.

b) Betrachten Sie den neuen Hamiltonian $H'(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$ und bestimmen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für Q und P.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und b). Was muss für α, β, γ, A gelten, damit die Bewegungsgleichungen erhalten bleiben, d.h. damit die Koordinatentransformation kanonisch ist.

d) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(q, Q)$ für die Koordinatentransformation.

e) Berechnen Sie die Poissonklammer $\{Q, P\}_{q,p}$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Bedingungen aus Aufgabe c).