Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2020

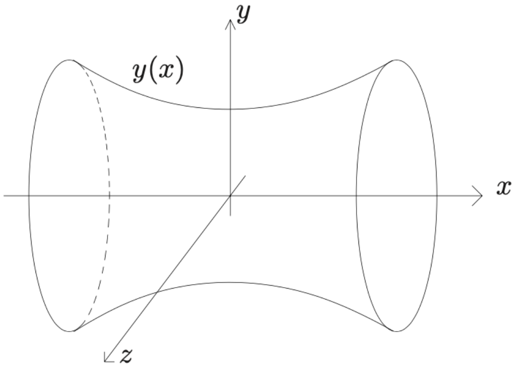
Übungsblatt 11
Variation

Abgabe bis: 10.07.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Seifenhaut**[a4+b4+c4= 12 Punkte]

Zwischen zwei Kreisringen mit Radius R, die bei $x = -x_0$ und $x = x_0$ zentriert in der $yz-$Ebene liegen, sei eine Seifenhaut gespannt (s. Skizze). Aufgrund der Oberflächenspannung wird sich die Seifenhaut so ausbilden, dass die entstehende Fläche minimal ist. Das gesamte Problem ist rotations- symmetrisch um die x-Achse, so dass sich die Seifenhaut durch eine Funktion $y(x)$ charakterisieren lässt.



a) Bestimmen Sie das Funktional $F[y, y', x]$, das die Fläche der Seifenhaut als Funktion von $y(x)$ angibt.

Lösung: Das Wegelement der Kurve hat die Länge $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$. Durch Rotation um die $x-$Achse ensteht eine zylindrische Teilfläche der Größe $2\pi y ds$. Damit ergibt sich das Funktional für die Gläche der Seifenhaut zu

$$F[y, y', x] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}dx. \tag{0.1}$$

Die Randwerte der Fläche sind (x_0, R), (x_1, R).

b) Bestimmen Sie die Funktion $y(x)$ entlang derer sich die Minimalfläche ausbildet.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Problem in der Form

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0 \tag{0.2}$$

geschrieben werden kann.

Lösung: Da der Integrand f des Funktionals nicht explizit von x abhängt, erhalten wir mit der Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(f - \frac{\partial f}{\partial y'}y'\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0 \text{ oder } y'(x) = \pm\sqrt{\frac{y^2}{c} - 1}, \tag{0.3}$$

wo c eine Konstante ist. Wir können nun integrieren

$$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{(y/c)^2 - 1}} = \pm \text{arcosh}(y/c) + K. \tag{0.4}$$

Wegen der symmetrie des Problemes ($x \leftrightarrow -x$) ist die integrationskonstante K null und wir erhalten

$$y(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right). \tag{0.5}$$

Die Randbedingungen $y(\pm x_0) = R$ verlangen nun

$$R = c \cosh\left(\frac{x_0}{c}\right). \tag{0.6}$$

Wir definieren die Konstante $d = \frac{x_0}{c}$, womit die Randbedingung

$$d \frac{R}{x_0} = \cosh(d) \tag{0.7}$$

wird.

c) Was passiert, wenn man die Kreisringe beginnend bei $x_0 = 0$ langsam auseinander zieht, d.h. x_0 vergrößert? Existiert für beliebige x_0 eine stabile Minimalfläche? *Hinweis: Eine der in Aufgabenteil b) auftretenden Integrationskonstanten ist durch eine transzendente Gleichung festgelegt. Untersuchen Sie diese numerisch.*

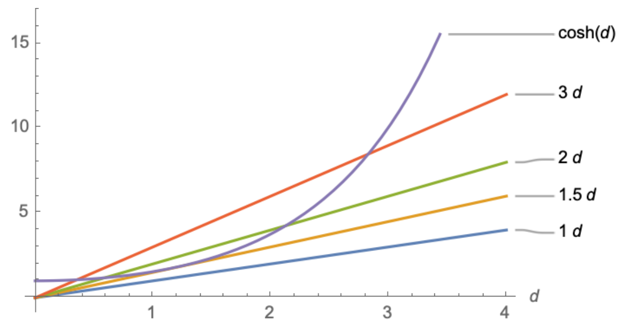


Abbildung 1: Gleichung zur Bestimmung der Integrationskonstanten.

Lösung: Im Plot 1 erkennen wir, dass eine stabile Minimalfläche nur für approx. $\frac{R}{x_0} \geq 1.5 \Leftrightarrow x_0 \leq \frac{R}{1.5}$ existiert. Zieht man die Seifenhaut zu weit auseinander, platzt sie.

2. **Kanonische Transformationen**[a4+b2+c3+d2+e2= 13 Punkte]

Wir betrachten ein System beschrieben durch die Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2} p^2 q^4 + \frac{1}{2} \frac{1}{q^2}. \tag{0.8}$$

Für Konstanten $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, A \neq 0$ und γ führen wir die folgende Koordinatentransformation durch:

$$q = P^\alpha, \qquad p = A Q^\beta P^\gamma. \tag{0.9}$$

a) Bestimmen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für $\dot{q}$ und $\dot{p}$. Drücken sie diese durch $Q, P, \dot{Q}$ und $\dot{P}$ aus und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für Q und P.

Lösung: Die kanonischen Bewegungsgleichungen lassen sich leicht ablesen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq^4, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2p^2q^3 + q^{-3} \tag{0.10}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$\alpha \dot{P} P^{\alpha-1} = \dot{q} = AQ^\beta P^{\gamma+4\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{P} = \frac{A}{\alpha} Q^\beta P^{\gamma+3\alpha+1}. \tag{0.11}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir

$$A(\beta Q^{\beta-1}\dot{Q}P^\gamma + \gamma Q^\beta P^{\gamma-1}\dot{P}) = \dot{p} = -2A^2Q^{2\beta}P^{2\gamma+3\alpha} + P^{-3\alpha}. \tag{0.12}$$

Indem wir (0.11) für $\dot{P}$ einsetzen erhalten wir nach umstellen

$$\dot{Q} = -\frac{A}{\beta}(2 + \frac{\gamma}{\alpha})Q^{\beta+1}P^{\gamma+3\alpha} + \frac{1}{\beta A}P^{-\gamma-3\alpha}Q^{-\beta+1}. \tag{0.13}$$

b) Betrachten Sie den neuen Hamiltonian $H'(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P))$ und bestimmen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für Q und P.

Lösung: Die transformierte Hamiltonfunktion ist

$$H'(Q,P) = \frac{1}{2}AQ^{2\beta}P^{2\gamma+4\alpha} + \frac{1}{2}P^{-2\alpha}. \tag{0.14}$$

Damit ergeben sich die kanonischen Bewegungsgleichungen zu:

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}A^2Q^{2\beta}(2\gamma + 4\alpha)P^{2\gamma+4\alpha-1} - \alpha P^{-2\alpha-1} \qquad \dot{P} = -\beta A^2 Q^{2\beta-1}P^{2\gamma+4\alpha}. \tag{0.15}$$

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und b). Was muss für α, β, γ, A gelten, damit die Bewegungsgleichungen erhalten bleiben, d.h. damit die Koordinatentransformation kanonisch ist.

Lösung: Offenbar ergeben die kanonischen Bewegungsgleichungen im Allgemeinen veränderte (falsche) Bewegungsgleichungen für Q und P. Nur für spezielle Werte von α, β, γ ist die Transformation kanonisch. Insbesondere folgt aus den beiden Bewegungsgleichugen für P

$$\dot{P} = \frac{A}{\alpha}Q^\beta P^{\gamma+3\alpha+1} \stackrel{!}{=} -\beta A^2 Q^{2\beta-1}P^{2\gamma+4\alpha} \tag{0.16}$$

für alle Werte von Q und P. Das kann nur gelten, wenn die Vorfaktoren und die Exponenten übereinstimmen, d.h.

$$\beta = 2\beta - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = 1 \tag{0.17}$$

$$\gamma + 3\alpha + 1 = 2\gamma + 4\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = 1 - \alpha \tag{0.18}$$

$$\frac{A}{\alpha} = -\beta = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad A = -\frac{1}{\alpha}. \tag{0.19}$$

Es sollte jetzt noch überprüft werden, dass mit diesen Relationen auch die Bewegungsgleichungen für P übereinstimmen.

Insgesamt haben wir die folgende kanonische Transformation für eine konstante $\alpha \neq 0$.

$$q = P^\alpha, \qquad p = -\frac{1}{\alpha}QP^{1-\alpha}. \tag{0.20}$$

d) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(q,Q)$ für die Koordinatentransformation.

Lösung: Die erzeugende Funktion $F(q,Q)$ muss per Definition die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p, \qquad \frac{\partial F}{\partial Q} = -P \tag{0.21}$$

erfüllen. Die zweite ergibt direkt:

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = -q^{\frac{1}{\alpha}} \implies F = -q^{\frac{1}{\alpha}}Q + C(q). \tag{0.22}$$

In die erste Gleichung eingesetzt ergibt das zusammen mit (0.20).

$$-\frac{1}{\alpha}Q + C'(q) = -\frac{1}{\alpha}QP^{1-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}Qq^{\frac{1}{\alpha}-1} \qquad \implies C'(q) = 0. \tag{0.23}$$

Daher

$$F = -q^{\frac{1}{\alpha}}Q + C \tag{0.24}$$

mit einer frei wählbaren Konstante C.

e) Berechnen Sie die Poissonklammer $\{Q,P\}_{q,p}$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Bedingungen aus Aufgabe c).

Lösung: Stellen wir die Koordinatentransormationen um erhalten wir

$$P = q^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad Q = A^{-\frac{1}{\beta}}p^{\frac{1}{\beta}}q^{\frac{\gamma}{\alpha\beta}}. \tag{0.25}$$

Damit erhalten wir

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{1}{\beta\alpha}A^{-\frac{1}{\beta}}p^{\frac{1}{\beta}-1}q^{-\frac{\gamma}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha}-1}. \tag{0.26}$$

Die Koordinatentransformation ist genau dann eine kanonische Transformation wenn $\{Q,P\} = 1$ ist. Daraus lassen sich die gleichen Bedingungen wie in Aufgabe c) ableiten.