Freie Universität Berlin

Analytische Mechanik

Sommer-Semester 2020

Übungsblatt 3
Rotationen und Kurven

Abgabe bis: 15.05.2020 um 12:00 Uhr

---

1. **Gekoppelte Federn** [2+2+2+2+1+2=11]

Der Hochenergiephyiker Sidney Coleman sagte: "*Die Karriere junger theoretischer Physiker besteht darin den harmonischen Oszillator in aufsteigenden Leveln der Abstraktion zu studieren*". Hier wollen wir mit dieser Reise beginnen.

Betrachte zunächst ein Objekt mit Masse m im Vakuum, dass durch eine Feder an einer Wand befestigt ist. Die Feder übt eine Kraft $F_\mathrm{F} = -kx$ auf die Masse aus, wobei x den Ort des Objekts bezeichnet und k die Federkonstante genannt wird.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und finden Sie die allgemeine Lösung.

Solution: Die Bewegungsgleichung die den harmonischen Oszillator beschreibt ist:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x =: -\omega^2 x. \tag{0.1}$$

Die allgemeine Lösung lässt sich schreiben als:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi). \tag{0.2}$$

Äquivalent ist auch

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{0.3}$$

eine allgemeine Lösung.

Etwas komplexere Dynamik finden wir, wenn man zwei Objekte mit gleicher Masse m betrachtet. Diese Massen sind je mit einer von zwei gegenüberliegenden Wänden durch eine Feder mit Federkonstante K verbunden. Zusätzlich sind beide durch eine Feder mit Stärke k miteinander verbunden.

b) Welche Kräfte wirken auf die beiden Massen? Schreiben sie die Bewegungsgleichung mithilfe einer Matrix M und einem Vektor $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2)^\mathrm{T}$ in der Form

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}. \tag{0.4}$$

Solution: Auf das erste Objekt wirken die Kräfte

$$F_1 = -Kx_1, \qquad F_{12} = -k(x_1 - x_2) \tag{0.5}$$

und auf das zweite Objekt

$$F_{21} = -k(x_2 - x_1), \qquad F_2 = -Kx_2. \tag{0.6}$$

Damit erhält man die folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}, \tag{0.7}$$

mit

$$M = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} -K-k & k \\ k & -K-k. \end{pmatrix} \tag{0.8}$$

c) Finden Sie eine orthogonale Matrix (Rotationsmatrix) R und eine diagonale Matrix D, so dass $M = RDR^\mathrm{T}$.

Solution: Die Eigenwerte der Matrix M können wir durch das charakteristische Polynom gefunden werden.

$$p(\lambda) := \det(M - \lambda\mathbb{1}) = (-(K+k)/m - \lambda)^2 - k^2/m^2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{0.9}$$

Das wird gelöst durch

$$\lambda_1 = -K/m =: -\omega_1^2 \qquad \lambda_2 = -(K+2k)/m =: -\omega_2^2. \tag{0.10}$$

Die Eigenvektoren können jetzt leicht geraten werden oder als Lösungen des Gleichungssystems $\lambda_{1,2}\boldsymbol{v} = M\boldsymbol{v}$ gefunden werden:

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}. \tag{0.11}$$

Daher erhalten wir

$$R := H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \qquad D := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\omega_1^2 & 0\\0 & -\omega_2^2\end{pmatrix}. \tag{0.12}$$

d) Nutzen Sie diese rotierte Eigenbasis um die Bewegungsgleichung allgemein zu lösen.

Solution: Wir können eine allgemeine Kurve in $\mathbb{R}^2$ schreiben als $\boldsymbol{r}(t) = a_1(t)\boldsymbol{v}_1 + a_2(t)\boldsymbol{v}_2$. In dieser Basis ist die Bewegungsgleichung (0.7) entkoppelt:

$$\ddot{a}_1\boldsymbol{v}_1 + \ddot{a}_2\boldsymbol{v}_2 = -\omega_1^2 a_1\boldsymbol{v}_1 - \omega_2^2 a_2\boldsymbol{v}_2. \tag{0.13}$$

Da $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ linear unabhängig sind erhalten wir als Lösung zwei unabhängige harmonische Oscillatoren:

$$a_1(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) \qquad a_2(t) = A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2). \tag{0.14}$$

In der Standardbasis:

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2)\\A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2)\end{pmatrix}. \tag{0.15}$$

e) Was passiert mit der Lösung im Limes $k \to \infty$ und was im Limes $K \to \infty$?

Solution: Für $k \to \infty$ wird die Frequenz ω_2 unendlich. Insbesondere wird die Bewegung $a_2(t)\boldsymbol{v}_2$ constant. Das deckt sich mit der Beobachtung, dass in diesem Limit die Feder starr wird.

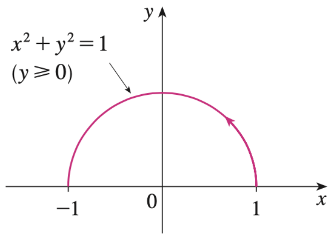
Wenn $K \to \infty$, dann werden beide Frequenzen unendlich, das gesamte Gebilde wird also starr und unbeweglich.

f) In einem System seien n Objekte durch Federn gekoppelt, so dass sich die Bewegungsgleichung als $\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}$ für eine symmetrische $n \times n$ Matrix M schreiben lässt. Welche physikalische Interpretation haben die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M?

Solution: Allgemein gibt es zu jedem Eigenvektor der matrix M eine Lösung der Bewegungsgleichung, die sich durch eine einzige Sinusschwingung beschreiben lässt. Diese Lösungen werden Eigenmoden genannt. Die Eigenwerte bestimmen die Frequenzen dieser Eigenmoden. Genauer entspricht ein Eigenwert λ einer Eigenfrequenz ω gerade via $\lambda = -\omega^2$. Allgemein sind Lösungen Superpositionen aus diesen Eigenmoden.

2. **Anwendungen von Kurvenintegralen** [3 + 4 + 1 + 1 + 1 + 3 + 1 + 1 = 15 Punkte]

Wir betrachten einen dünnen Draht, der zu einem Halbkreis gebogen wurde, sodass er die obere Hälfte eines Einheitskreises nachbildet.



a) Die Dichte des Drahtes am Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei durch die skalare Funktion $\rho(x, y) = 2 + x^2 y$ beschrieben. Berechnen Sie die Masse des Drahtes

Solution: Die Masse des Drahtes ist gegeben durch

$$m = \int_C \rho(x, y) ds, \tag{0.16}$$

wobei C die Kurve ist, auf der der Draht liegt. In diesem Fall können wir C durch $r(t) = (\cos(t), \sin(t))$ zwischen $t_0 = 0$ und $t_f = \pi$ parametrisieren. Nun wissen wir, dass

$$\int_C \rho(x, y) ds = \int_{t_0}^{t_f} \rho(x(t), y(t)) |r'(t)| dt, \tag{0.17}$$

wobei $|r'(t)| = \sqrt{r'(t).r'(t)}$ und $r'(t) = (dr_x(t)/dt, dr_y(t)/dt)$. Mithilfe dieses Ausrucks können wir die Masse berechnen:

$$\begin{aligned} m &= \int_C \rho(x, y) ds \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t)\sin(t)) \sqrt{\left(\frac{d(\cos(t))}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(\sin(t))}{dt}\right)^2} \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t)\sin(t)) \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t)\sin(t)) dt \\ &= \left[2t - \frac{\cos^3(t)}{3}\right]_0^\pi \\ &= 2\pi + 2/3. \end{aligned}$$

b) Gegeben eine skalare Dichtefunktion $\rho(x,y)$ liegt der *Schwerpunkt* des Drahtes am Punkt (x',y') mit

$$x' = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)ds, \qquad y' = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)ds.$$

Hierbei ist C die Kurve, auf der der Draht liegt, und m die Gesamtmasse des Drahtes. Wir nehmen nun an, dass die Dichte des Drahtes proportional zum Abstand von der Linie $y = 1$ ist, d.h. $\rho(x,y) = k(1-y)$. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Drahtes unter dieser Annahme.

Solution: Wir beginnen damit, die Masse des Drahtes zu berechnen. Dazu verwenden wir die selbe Methode wie in der vorigen Aufgabe, ersetzen aber die Dichte durch $\rho(x,y) = k(1-y)$. Wir erinnern uns daran, dass für die Kurve, auf der der Draht liegt, insbesondere $|r'(t)| = 1$ für alle t gilt. Damit ist die Masse

$$\begin{aligned}
m &= \int_C \rho(x,y)ds \\
&= \int_0^\pi k(1-\sin(t))dt \\
&= k[t+\cos(t)]_o^\pi \\
&= k(\pi-2).
\end{aligned}$$

Wir können nun x' und y' mithilfe der in der Fragestellung angegebenen Ausdrücke berechnen. Zuerst bemerken wir allerdings, dass der Draht symmetrisch um $x = 0$ ist, woraus sofort folgt, dass $x' = 0$. Damit müssen wir nur noch y' berechnen. Das tun wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)ds \\
&= \frac{1}{k(\pi-2)}\int_0^\pi yk(1-y)dt \\
&= \frac{1}{\pi-2}\int_0^\pi (\sin(t)-\sin^2(t))dt \\
&= \frac{1}{\pi-2}[-\cos(t)-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin(2t)]_0^\pi \\
&= \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}. \qquad (0.18)
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir die Lösung

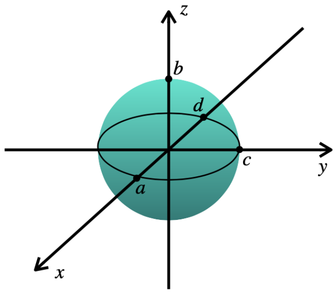
$$(x',y') = \left(0, \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}\right) \qquad (0.19)$$

Wir betrachten nun eine um den Koordinatenursprung zentrierte Sphäre mit Radius r, wie im folgenden Bild gezeigt.

Die Koordinaten der vier Punkte a, b, c und d sind gegeben durch:

$$a = (r,0,0), \qquad b = (0,0,r), \qquad c = (0,r,0), \qquad d = (-r,0,-0)$$

c) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt a nach Punkt b an. In anderen Worten: Berechnen Sie eine Funktion $r(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$, sowie Werte t_1 und t_2, sodass $a = r(t_1)$, $b = r(t_2)$ und für alle $t_1 \leq t \leq t_2$ der Punkt $r(t)$ auf der Sphäre liegt.



d) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt b nach Punkt c an.

e) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt c nach Punkt d an.

Solution: Verschiedene Parametrisierungen der Kurve sind möglich. Mögliche Kandidaten sind:

$$a \to b : r(t) = (r\sin(t), 0, r\cos(t)) \text{ with } t_1 = \pi/2, \quad t_2 = 0$$
$$b \to c : r(t) = (0, r\sin(t), r\cos(t)) \text{ with } t_1 = 0, \quad t_2 = \pi/2$$
$$c \to d : r(t) = (r\cos(t), r\sin(t), 0) \text{ with } t_1 = \pi/2, \quad t_2 = \pi$$

f) Betrachten Sie nun ein Teilchen, das sich nur auf der Oberfläche der Sphäre bewegen kann und berechnen Sie die von einem Kraftfeld $F(x, y, z) = (x^2, y^2, -xz)$ verrichtete Arbeit, wenn es das Teilchen von Punkt a nach Punkt b bewegt.

Solution: Per Definition ist die entlang einer Kurve verrichtete Arbeit gegeben durch das Wegintegral der Kraft entlang dieser Kurve

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_{t_1}^{t_2} F(r(t)) \cdot r'(t) dt. \tag{0.20}$$

Oben haben wir schon eine Parametrisierung des kürzesten Wegs von a nach b berechnet:

$$r(t) = (r\sin(t), 0, r\cos(t)) \text{ with } t_1 = \pi/2, \quad t_2 = 0. \tag{0.21}$$

Daraus folgt

$$r'(t) = (r\cos(t), 0, -r\sin(t)), \tag{0.22}$$

und

$$\begin{aligned} W &= \int_{\pi/2}^{0} (r^2\sin^2(t), 0, -r^2\sin(t)\cos(t)) \cdot (r\cos(t), 0, -r\sin(t)) dt \\ &= \int_{\pi/2}^{0} 2r^3 \sin^2(t)\cos(t) dt \\ &= 2r^3 \left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_{\pi/2}^{0} \\ &= -\frac{2r^3}{3}. \end{aligned} \tag{0.23}$$

In den beiden folgenden Aufgaben betrachten wir das Kraftfeld

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right). \tag{0.24}$$

g) Das Kraftfeld $F(x,y,z)$ ist ein konservatives Kraftfeld, d.h. es existiert eine skalare Funktion $U(x,y,z)$ sodass $F(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)$. Geben Sie $U(x,y,z)$ an. *(Hinweis: Sie sollten dieses Kraftfeld erkennen.)*

Solution: Wir erinnern uns daran, dass die Gravitationskraft, die eine Masse m am Punkt $\mathbf{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$durch eine Masse M am Ursprung erfährt als

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \\ &= mMG \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right), \end{aligned} \tag{0.25}$$

gegeben ist. Folglich ist die Aufgabe, das Potential der Gravitationskraft mit $mMG = 1$ zu berechnen. Wir wissen allerdings, dass die Gravitationskraft $F(\mathbf{x}) = \nabla U(x,y,z)$ das Potential

$$U(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{0.26}$$

hat. Damit erhalten wir für den Fall, dass $mMG = 1$ ist

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{0.27}$$

h) Berechnen Sie die vom Kraftfeld verrichtete Arbeit, wenn es ein Teilchen von Punkt c nach Punkt d entlang der Sphäre bewegt.

Solution: Da das Kraftfeld konservativ ist, hängt die Arbeit nicht vom Weg ab und ist einfach proportional zur Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt. In diesem Fall ist $U(0,r,0) = U(0,0,-r)$ und die verrichtete Arbeit ist folglich 0.