Analytische Mechanik (20113401)
Vorlesender: Jens Eisert
Kapitel 1: Newtonsche Mechanik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Newtonsche Gesetze

1.1 Einleitende Gedanken

1.1.1 Analytische Mechanik als Basis der theoretischen Physik

Der Kurs über analytische Mechanik ist ein erster Kurs in der theoretischen Physik. Er ist im Curriculum der Kurse im Physikstudium die erste Vorlesung, die systematisch ein Gebäude einer physikalischen Theorie aufbaut und sich dabei der Mathematik als Sprache bedient. Dies wird freilich vorerst recht elementare Mathematik sein. Und dennoch zeichnet die Erfahrung, dass sich die Natur in Formeln, in einer mathematischen Sprache fassen lässt, die historische Entwicklung nach. Seit Beginn der Renaissance fand in Europa eine Explosion des naturwissenschaftlichen Schaffens statt, einhergehend mit einer rapiden technologischen Entwicklung. Man verstand, dass diese technologische Entwicklung eines tiefen Verständnisses der Natur bedurfte, und gleichermaßen war jene ein Stimulus für grundlegende Naturbeschreibungen. Und es wurde klar, dass es berechtigte Hoffnung gibt, einfache Gesetze gibt, die die Natur beschreiben, trotz ihrer großen Komplexität und Reichhaltigkeit. Seit Beginn des 17. Jahrhunderts wurden diese Gesetze zunehmend in eine präzise Formulierung gebracht.

Die Keplerschen Gesetze sind ein herausragendes Beispiel dieser Art. Gewiss, es war bekannt, dass die hellen Lichtpunkte am Sternhimmel Planeten entsprechen, die von der Sonne angeleuchtet werden. Dennoch ist es eine bemerkenswerte Leistung Keplers (1571-1630), aus der Beobachtung der Bewegung dieser Punkte darauf zu kommen, dass sich Planeten auf elliptischen Bahnen bewegen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Noch erstaunlicher ist die Einsicht, dass die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten sich verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen. Diese einfachen Gesetze – hier das erste und das dritte Keplersche Gesetz – waren weitaus einfacher, als alle vormals zuweilen grotesk komplizierten vorgeschlagenen Regeln, und hatten gleichermaßen mehr Vorhersagekraft. In ihrer Wirkung waren sie revolutionär. Der wichtige Zeitgenosse Keplers, Galileo Galilei, formulierte die bemerkenswerte Einsicht, dass es formulierbare Naturgesetze zu geben scheint, wie folgt etwas poetisch:

"Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben" (Galileo Galilei, 1564-1642).

1.1.2 Principia als historisches Hauptwerk der Theorie

Den vorläufigen Höhepunkt stellte ein Werk dar, das gewissermaßen die Basis für den gesamten Kurs darstellt. Dies waren die 'Philosophiae Naturalis Principia Mathematica' von Isaac Newton (1643-1727). Dieses monumentale Hauptwerk, sein Opus Magnis, kann als erste umfassende naturwissenschafliche Arbeit überhaupt gesehen werden, deren Bedeutung für die Physik kaum zu überschätzen ist. Er fasste in dieser Arbeit nicht nur das Wissen der Zeit zusammen, sondern schaffte einen ganz neuen Rahmen, in dem Naturbeschreibung möglich war. Er beschrieb in einem Gravitationsgesetz die universelle Gravitation und formulierte Bewegungsgesetze, die den Grundstein für die klassische Mechanik legten, die im Zentrum dieses Kurses steht. Um diese beeindruckenden Leistungen zu schaffen, musste er gleichzeitig neue Mathematik entwickeln, die zu jener Zeit noch nicht fortgeschritten genug war. Etwa gleichzeitig mit Gottfried Wilhelm Leibniz entwickelte Newton so die Infinitesimalrechnung. Ein wesentlicher Teil des Kurses setzt sich mit diesen Ideen auseinander [1]. Auf eine Art zeichnet der Kurs die historische Überraschung über

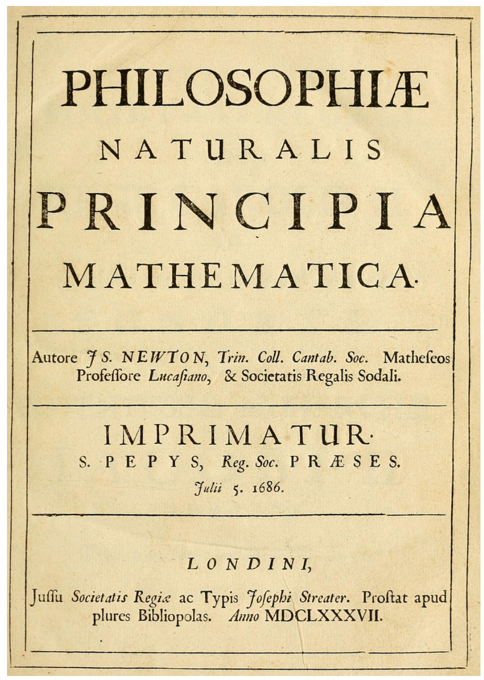

Abbildung 1.1: Die Titelseite der Principia der Erstausgabe von 1687 (Bildquelle: Wikipedia).

[1] Ebenso, wie Newson zweifelsohne eines der großen Genies der letzten Jahrhunderte war, war er persönlich kein ganz einfacher Mensch. So erfuhr auch der Zeitgenosse Robert Hooke (1635-1703), der zu ähnlichen Schlüssen wie Newton kam, bei weitem nicht die selbe Anerkennung. In der Tat führten Newton und Hooke einen regen Briefwechsel. Dieser Briefwechsel war Ausgangspunkt des späteren Vorwurfs von Hooke an Newton, plagiiert zu haben. Newton war zwar bereit, zu bemerken, dass Hooke ihm Anleitung gegeben habe, sowohl hinsichtlich der Idee, dass eine Bahnellipse mit einer mit dem inversen Quadrat der Entfernung von einem Brennpunkt abnehmenden Anziehungskraft herrühre. Hooke habe ihn auch auf die Idee gebracht, dass dieses Konzept auch für planetarische Bewegungen anwendbar ist. Darüberhinaus war er allerdings nicht bereit, Beiträge einzuräumen, und vor allem Newton verweigerte jede weitreichende Einlassung auf Hookes Beiträge. Auch mit Christiaan Huygens (1629-1695) Streit, wer von ihnen die

die Möglichkeit einer Naturbeschreibung in Naturgesetzen – und hoffentlich auch einen kleinen Teil der Faszination – nach.

1.1.3 Klassische Mechanik als Basis unserer Naturbeschreibung

Die klassische Mechanik, wie wie genannt wurde, blieb über lange Zeit die gängige Naturbeschreibung. Newton erfand mit der klassischen Mechanik gleich wichtige Teile der Optik gleich mit: Die Teilchentheorie des Lichtes stammt von ihm – Vorläuferin der Idee von Photonen als Anregungen von Lichtmoden in der Quantenmechanik – ebenso wie die Erklärung des Lichtspektrums.

Dies ging so weit, dass man Ende des 19. Jahrhunderts in einem weitgehenden Konsens dachte, als diese Ideen zu Ende gedacht waren, die Physik sei gewissermaßen fertig. Bekannte Protagonisten rieten von einem Physikstudium ab, weil nun noch noch Details zu klären sein würden. Bekanntermaßen begann dann erst mit der Geburt der Quantenmechanik die moderne theoretische Physik.

Dies heißt nicht, dass die klassische Mechanik dadurch obsolet werden würde. Der Gegenteil ist der Fall. Sie ist nach wie vor die akkurate und sinnvolle Theorie, die Bewegung von makroskopischen Körpern zu beschreiben. Natürlich ist jenes auch in der Quantenmechanik möglich (meinem Fach), aber man muss recht tief in die Theorie einsteigen, um Dinge wie Planetenbahnen auch in der Quantentheorie herzuleiten (selbst in der Literatur ist diese Frage bemerkenswert wenig diskutiert, scheint mir). Allenfalls würden sich aber winzige Korrekturen ergeben, die nicht messbar wären. Zwar kann man tatsächlich Viren zu quantenmechanischen Superpositionen bringen, so dass dann lebende Wesen gewissermaßen gleichzeitig durch zwei verschiedene Spalte eines Doppelspaltes fliegen, aber auch das erfordert erhebliche experimentelle Präzision.

Die Relativitätstheorie – eine weitere Säule der modernen theoretischen Physik – sagt zwar weitaus gewichtigere Korrekturen etwa zu den Planetenbahnen voraus: Aber einer der Gründe, warum Albert Einstein (1879-1955) nicht gleich einen Nobelpreis für seine Relativitättheorie erhielt, die er 1905 als spezielle und 1915 als allgemeine Theorie veröffentlichte, war der, dass es schwierig war, diese Theorie experimentell zu verifizieren. Auch wenn heute die Berechnungen von Satellitenbahnen die Relativitätstheorie berücksichtigen, heißt das nicht, dass die Newtonschen Gesetze nicht schon eine hervorragende Approximation der echten Bahnen liefern.

1.1.4 Grundlegende Position der klassischen Mechanik

Die grundlegende Position der klassischen Mechanik ist also durch zwei Einsichten motiviert: Einmal ist wahr, dass man ziemlich weit gehen muss, um überhaupt Abweichungen von ihr in der Natur zu beobachten, und dies war nur mit erheblicher technologischer Entwicklung möglich. Dies ist die Physik auf sehr kleinen Skalen, extrem stark isolierten Systemen, solchen mit erheblicher Kontrolle, enorm großen Abständen oder großen Massen. Also ist die analytische Mechanik 'nach wie vor richtig' und nicht

erste federgetriebene Uhr baute. Es ist interessant zu bemerken, dass zeitgleich mit dem Aufkommen der Naturwissenschaft im modernen Sinne auch erhebliche Streitigkeiten über Prioritäten von Erfindungen und Entdeckungen aufkamen.

überholt. Andererseits waren und sind die konzeptuellen Einsichten so wegführend. Nicht nur abstrakt, dass man die Natur in Gleichungen beschreiben kann.

Sondern auch in Details, im mathematischen Formalismus und in der konkreten Herangehensweise. So ist etwa der Formalismus der Hamiltonschen Mechanik in der analytischen klassischen Mechanik und der Quantenmechanik fast identisch. Wir werden sehen, dass sich gewisse Ausdrücke gewissermaßen übesetzen lassen. Das Konzept des Phasenraumes ist das gleiche, symplektische Strukturen im wesentlichen auch. Wenn man die klassische Mechanik gut verstanden hat, hat man einen guten Teil der Quantenmechanik also gleich mitverstanden.

1.1.5 Wie dieses Skript zu lesen ist

Dieser Skript ist zur Unterstützung der in diesem Semester elektronisch gehaltenen Vorlesung gedacht. Da das Tafelerlebnis fehlt, ist er im Vergleich zu einer regulären Vorlesung wichtiger. Er soll einigermaßen vollständig und lesbar sein: Diesen Anspruch hat er. Einen Anspruch, den er nicht hat, ist originell zu sein. Tatsächlich ist er stark inspiriert von den folgenden zwei Büchern, die ich beide empfehle:

- "Klassische theoretische Physik", J. Honerkamp, H. Römer, Springer Verlag, 1989.
- "Classical mechanics", H. Goldstein, Addison-Wesley, 1951.

Letzteres ist vor allem sehr umfassend und das bekannteste Werk zum Thema. Dies geht so weit, dass ich kein Copyright für diesen Skript beanspruche, sondern stattdessen Teile stark übernommen bis hin zu schamlos kopiert habe. Die Attitüde ist hier ganz pragmatisch und auf Lernerfolg optimiert; der Skript ist auch ausschließlich für die Vorlesung als Hilfestellung bestimmt und nicht zur Vervielfältigung. Hier bitte ich um Verständnis. Da der Stoff weitgehend kanonisch ist, sind sehr viele Bücher geeignet, um die Vorlesung zu begleiten.

- " Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik und mathematische Vorbereitungen ", W. Nolting, Springer, 1996.

Dieses Buch ist etwa in Berlin auch beliebt und ein gutes Buch zum Thema.

1.1.6 Was der Kurs lehren wird

Dieser Kurs stellt sich der Aufgabe, ein erstes Gebäude einer physikalischen Theorie aufzustellen: Das der klassischen Beschreibung der Natur, ohne relativistische Effekte und die der Quantenmechanik zu berücksichtigen. Dies wird uns recht weit führen, um Aspekte der Natur zu beschreiben, wie wie sie aus der Alltagserfahrung kennen. Die klassische Mechanik ist ein wunderbares Gebäude, das hochentwickelt ist, und auch etwas wie *Schönheit* in einer physikalischen Theorie vermittelt.

- Unser Ausgangspunkt wird auch der historische Ausgangspunkt sein: Der der *Newtonschen Gesetze*, die die Grundlage dieses physikalischen Theorie geschaffen haben, im vielleicht wichtigsten Werk der Physik.

- Wir werden im folgenden die Konsequenzen dieser Gesetze ausloten und uns einige Probleme ansehen, und etwa die *Keplerschen Gesetze* herleiten und anderweitig Mehrteilchenprobleme und Phasenräume ansehen.

- Ganz ohne *Mathematik* wird es nicht gehen, daher werden wir Aspekte der linearen Algebra, der Diagonalisierung von Matrizen oder der Singulärwertzerlegung wiederholen.

- Ein starker Augenmerk wird auf *Lagrangesche Methoden* und *Variationsprinzipien* gelegt werden. Hier sind Bewegungen unter Zwangsbedingungen wichtig.

- Im folgenden wird der *Hamiltonformalismus* diskutiert werden, wie er in der klassischen Mechanik einer der Pfeiler ist und auch die Grundlagen für die Quantenmechanik schafft.

- *Bewegungen in Nichtintertialsystemen* werden diskutiert.

- *Lineare Schwingungen* komplexer gekoppelter Systeme werden umfassend untersucht.

- Klassisches *deterministisches Chaos* werden wir uns vorknöpfen.

- Symmetrien und das *Noether-Theorem* werden wir uns ansehen.

- Und unterwegs werden wir einen kurzen Blick auf die *Differentialgeometrie* der klassischen Mechanik werfen, wenngleich wir für eine Vertiefung keine Zeit haben werden.

- Im letzten Teil der Vorlesung widmen wir uns einer wichtigen Anwendung: Nämlich der der *klassischen statistischen Mechanik*, in der wir thermodynamische Ensembles kennenlernen und die Physik vieler Teilchen mit statistischen Methoden betrachten, als Grundlage der Thermodynamik.

1.2 Die Newtonschen Gesetze

Newton formulierte seine Naturbeschreibung ausgehend von drei Gesetzen. Diese Gesetze basierten auf einer Reihe von zentralen Einsichten. Eine wichtige dieser Einsichten bestand darin anzuerkennen, dass es nicht die Bewegung von Körpern selbst ist, die einer Erklärung bedarf: Es ist die Änderung dieser Bewegung. Die geradliniggleichförmige Bewegung ist gewissermaßen der Normalfall, und erst die Wirkung von *Kräften* sorgt dafür, dass Körper von einer solchen Bewegung abweichen. Die genaue Form dieser Kräfte ist dabei zu postulieren.

1.2.1 Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von Körpern

Die Newtonschen Gesetze legen die Antwort von Körpern in ihrer Bewegung auf Kräfte – oder eben deren Anwesenheit – fest. Dabei geht es nicht um detaillierte Beschaffenheiten der Körper, wie etwa Form oder Farbe: Wenn sie als homogene und feste

Entitäten gesehen werden können, braucht man lediglich die Koordinaten, um dessen *Ort* festzulegen. Dieser Ort kann durch einen Vektor $\mathbf{r}$ im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ festgelegt werden. Am Ende des Kapitels werden wir uns wieder ins Gedächtnis rufen, was ein Vektor ist, aber es sollte hier schon klar sein, dass er drei Komponenten hat, den drei Koordinaten r_1, r_2, r_3 von $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ entsprechend.

Tatsächlich interessiert uns in der analytischen Mechanik die Änderung von Orten im Verlaufe der Zeit. So wird der Ort als Funktion der Zeit eine Kurve, die *Bahnkurve*

$$t \mapsto \mathbf{r}(t). \tag{1.1}$$

Etwas hochtrabend gesprochen ist dies eine parametrisierte Kurve $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^3$, was nichts anderes heißt, dass der Ort des Körpers $\mathbf{r}(t)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ ist. Der differentialgeometrische Anklang ist hier kein Zufall. Wir werden uns weitgehend den tiefen Zusammenhang mit der Differentialgeometrie verkneifen und erst gegen Ende des Kurses darauf zurückkommen.

Die Änderung des Ortes als Funktion der Zeit ist die *Geschwindigkeit*. Dies ist wieder eine parametrisierte Kurve, wenn die des Ortes differenzierbar ist, und es ist

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t). \tag{1.2}$$

Wiederum meint dies die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Die ganze parametrisierte Kurve ist die *Geschwindigkeitskurve*.

Die *Beschleunigung* wiederum ist die Änderung der Geschwindigkeit, wieder vektoriell gesehen. Also ist

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t). \tag{1.3}$$

Naheliegenderweise bezeichnet man die gesamte parametrisierte Kurve auch als *Beschleunigungskurve*.

1.2.2 Erstes Newtonsche Gesetz

Das erste Newtonsche Gesetz nimmt vor allem den obigen Gedanken auf, dass es die Änderungen von Bewegungen ist, die einer Erklärung bedürfen.

> **Erstes Newtonsches Gesetz:** Ein Körper bleibt in Ruhe oder im Zustand einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung in einem Inertialsystem genau dann, wenn keine Kräfte auf ihn wirken.

Dies meint, dass der Körper in dieser Art der Bewebung bleibt, wenn er unbeeinflusst ist. Dieses Gesetz formuliert ein Nullelement in der Menge der Kräfte. Liegt diese Freiheit von Kräften vor, folgt auch eine Art 'Nullelement' der Bewegung: Dies ist die beschleunigungsfreie Bewegung, für die

$$\mathbf{a}(t) = 0 \tag{1.4}$$

gilt für Zeiten $t \geq 0$. Jede Abweichung von einer solchen Freiheit von Kräften führt auf die eine oder andere Art zu einer Änderung der Bewegung. Welcher Art diese Kräfte sind, wird postuliert: Wir werden auf solche Kräfte bald zurückkommen.

Der Begriff des Inertialsystems ist eine Subtilität des ersten Newtonschen Gesetzes. Dieses behauptet nämlich nicht, dass es in jedem Bezugssystem gelten soll, sondern eben nur nur in *Inertialsystemen*. Dies sind Bezugssysteme, in denen der Trägkeitssatz gilt. So könnte man Anmerken, dass es sich bei diesem Gesetz um eine Tautologie handelt: Der Trägheitssatz gilt genau dann, wenn er gilt. Er wird erst dann zu einer sinnvollen Aussage, wenn man bemerkt, dass es solche Inertialsysteme tatsächlich zu enorm guter Näherung gibt. Ein Koordinatensystem, das sich ohne Rotation relativ zum Fixsternhimmel geradlinig-gleichförmig bewegt, ist in enorm guter Näherung ein solches Inertialsystem.

Eine rotierende Bewegung ist kein Inertialsystem. Wenn man auf einem Karussell sitzt, wird man merkwürdige, scheinbar zufällige Abweichungen von obigem Gesetz bemerken. Dinge fallen nach außen ohne ersichtlichen Grund aus diesem System heraus betrachtet. Es ist auch ein weiterer subtiler Punkt zu beachten. Sicher kann man auch bei einer rotierenden Bewegung eine zeitabhängige Koordinatentransformation finden, dass eine gegebene Bahnkurve $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ in eine geradlinig-gleichförmige übergeht. In einem Intertialsystem muss allerdings der Trägheitssatz für alle Bahnkurven kräftefreier Massenpunkte gelten.

1.2.3 Galileitransformationen

Und noch ein Punkt ist wichtig. Wenn ein System S ein Inertialsystem ist, gilt dies auch für jedes andere System S', das sich relativ zu S in einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung verhält. Hier kommt eine Begrifflichkeit ins Spiel, die wir später noch genauer ansehen werden, nämlich die einer *Koordinatentransformation*: Man kann Bewegungen in verschiedenen Koordinatensystemen betrachten. Eine Änderung des Koordinatensystems verändert nicht die Physik, sondern nur unsere Beschreibung von ihr. Eine Galileitransformation ist eine solche Transformation von S nach S'. In den neuen Koordinaten ist die Bahnkurve $t \mapsto \mathbf{r}'(t)$ beschrieben durch

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v_0}t + \mathbf{r}_0. \tag{1.5}$$

Hier ist $\mathbf{v_0} \in \mathbb{R}^3$ der Vektor der relativen Geschwindigkeit – wir kommen noch genauer darauf zurück – und $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor eines Ortes. Es gilt in der Mechanik das *Relativitätsprinzip*: Alle Inertialsysteme sind physikalisch gleichwertig, und keines ist einem anderen vorzuziehen. Keine Messung kann ein bestimmtes Intertialsystem auszeichnen. Die Gesetze der Physik müssen also invariant unter Galileitransformationen sein.

1.2.4 Die Zeit als Parameter in der klassischen Mechanik

Noch ein subtiler Punkt soll hier betont werden, der vielleicht offensichtlich scheint: In der klassischen Mechanik ist die Zeit ein *Parameter*. Sie ist als fest vorgegeben angenommen, die für alle Körper gleichermaßen gilt. Dies mag offensichtlich erscheinen, und deckt sich mit unserer Alltagserfahrung, dass die Zeit gleichmäßig und überall gleich verstreicht: Also kann man sie auch als Parameter der Bewegung wählen. Doch ist dies eine der Annahmen, die in der Relativitätstheorie aufgegeben wird. Nicht allerdings in der nichtrelativistischen Quantenmechanik: Auch da ist die Zeit ein fest vorgegebener Parameter (was am Rande bemerkt zu einer langen Debatte geführt hat). Auch hier sind die klassische Mechanik und die Quantenmechanik strukturell ähnlich.

1.2.5 Zweites Newtonsches Gesetz

Während das erste Newtonsche Gesetz die Konsequenzen einer kräftefreien Situation postuliert, geht das zweite Newtonsche Gesetz darauf ein, was passiert, wenn doch Kräfte auf einen Körper wirken.

Zweites Newtonsches Gesetz: Es gilt für den Vektor der Beschleunigung eines Körpers

$$m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t), \tag{1.6}$$

wenn $\mathbf{F}(t)$ die Kraft auf den Massenpunkt zum Zeitpunkt $t \geq 0$ ist. Die Masse des Körpers $m > 0$ spielt hier die Rolle eines Proportionalitätsfaktors.

Die Beschleunigung ist also bis auf diesen Proportionalitätsfaktor gleich der Kraft, die auf ein Teilchen wirkt. Dieser Faktor ist die Masse, oder genauer die *träge Masse* des Teilchens. Sie ist eine Eigenschaft des Teilchens [2]. Es ist interessant zu bemerken, dass dieses Gesetz als eine Differentialgleichung gegeben ist: Erklärt wird die Beschleunigung, also die Änderung der Geschwindigkeit. Dies ist sehr häufig in der Physik, dass Gesetze gegeben sind in einer Form, dass die Änderung von etwas in der Zeit festgelegt wird.

Wenn auf zwei Körper mit unbekannten Massen m_1 und m_2 die gleiche Kraft wirkt, kann man aus deren Verhältnis der Beschleunigungen das Verhältnis der Massen bestimmen: So ist

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|}. \tag{1.7}$$

1.2.6 Drittes Newtonsches Gesetz

Das dritte Newtonsche Gesetz legt die gegenseitige Kraftwirkung zwischen Körpern fest, als eine Art Reziprozität.

Drittes Newtonsches Gesetz: Übt ein Körper auf einen weiteren eine Kraft $\mathbf{F}_{2,1}(t)$ zum Zeitpunkt t aus, so übt letzterer auf ersteren eine Kraft $\mathbf{F}_{1,2}(t)$ aus, die denselben Betrag und die gleiche Richtung, aber die entgegengesetzte Orientierung hat.

Es sollte in dieser Formulierung klar sein, dass dieses Gesetz auch für beliebige

[2] Man betont die Rolle als Proportionalitätsfaktor, wenn man von der trägen Masse spricht, im Gegensatz zur *schweren Masse*, die im Gravitationsgesetz vorkommt (aber mit ersterer eng verwandt ist, wie wir sehen werden.

Paare von einer Vielzahl von Körpern gilt. Kurz gesagt formuliert man das dritte Newtonsche Gesetz auch als “actio est reactio”.

1.2.7 Kraftkurven und Bewegungsgleichungen

Auf der Basis des zweiten Hauptsatzes stellt man experimentell auch die weiteren Einsichten fest: Massen nicht nur stets positiv, $m > 0$, sondern auch *extensiv*: Fügt man einen Körper mit Massen m_1 und m_2 zusammen, wird der gemeinsame Körper die Masse

$$m = m_1 + m_2 \tag{1.8}$$

haben. Kräfte addieren sich wie Vektoren. Dies nimmt Vektorräume vorweg, es sollte aber auch hier schon klar sein, was dies meint: Wenn zu einem Zeitpunkt t auf einen Körper zwei Kräfte $\mathbf{F}_1(t)$ und $\mathbf{F}_2(t)$ unterschiedlichen Ursprungs wirken, ist die resultierende Kraft auf den Körper

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_1(t) + \mathbf{F}_2(t), \tag{1.9}$$

in einer Vektoraddition.

Da das zweite Newtonsche Gesetz die Änderung von Geschwindigkeiten durch Kräfte festlegt, kann man durch

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{1.10}$$

im Prinzip die Bewegung eines Körpers mit Masse m berechnen, sofern man den Ort $\mathbf{r}(0)$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(0)$ zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ sowie die *Kraftkurve*

$$t \mapsto \mathbf{F}(t) \tag{1.11}$$

kennt.

Hier gibt es aber einen subtilen Punkt: In aller Regel ist die Kraftkurve nicht direkt bekannt. Sie kann ja von der gesamten Geschichte einer Bewegung abhängen, und muss auch nicht nur vom Ort des Körpers bestimmt sein. Oft ist aber schon so, dass die Kraft auf einen Körper von wenigen Parametern abhängt, also in aller Regel vom Ortes und der Geschwindigkeit und eventuell noch der Zeit. Ist das der Fall, haben wir

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \tag{1.12}$$

mit einem Kraftgesetz $\mathbf{f}$ und das zweite Newtonsche Gesetz nimmt die Form

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \tag{1.13}$$

an. Dies ist die *Bewegungsgleichung* eines Körpers. Diese Bewegungsgleichung hat die Form einer *gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung*. Gewöhnlich, weil keine partiellen Ableitungen vorkommen, und zweiter Ordnung, weil die höchste vorkommende Ableitung zweiter Ordnung ist. Diese lässt sich als Anfangswertproblem lösen, wenn man $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ und $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ kennt, also sechs reelle Zahlen und die funktionale Abhängigkeit $\mathbf{f}$. Diese Situation ist wohlvertraut: Wenn man einen Ball wirft, werden die Anfangsgeschwindigkeit und die anfängliche Geschwindigkeit wichtig sein; schon dann kann man die ganze Trajektorie bestimmen. Dies wird in Abwesenheit des Luftwiderstandes eine Parabel sein, aber mit geschwindigkeitsabhängigen Kräften kann man auch den Luftwiderstand gut modellieren.

1.2.8 Kraftfelder

Wir werden im folgenden wichtige Kraftgesetze untersuchen: Dies reflektiert die nicht seltene Situation, dass die Kraft auf einen Körper lediglich von seinem Ort abhängt (oder dies zu guter Approximation), auf eine in der Zeit unveränderliche Weise. Dann ist

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)). \tag{1.14}$$

Die Funktion $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt dann *Kraftfeld* (nota bene ist dieses verschieden von der oben genannten Kraftkurve). Diese Situation ist in der klassischen Mechanik besonders wichtig. Wenn $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ stets parallel zu $\mathbf{r}$ ist, was tatsächlich häufig der Fall ist, nennt man $\mathbf{g}$ ein *Zentralkraftfeld*.

1.3 Wichtige Kraftgesetze

Wir wollen uns im folgenden einigen wenigen Beispielen von wichtigen Kraftgesetzen widmen, also Abhängigkeiten der Kraft vom Ort, der Geschwindigkeit und der Zeit. Dies meint Funktionen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^3$ wie in Eq. (1.12) erklärt.

1.3.1 Homogene und zeitunabhängige Kräfte

Dies ist der einfachste sinnvolle vorstellbare Fall. Hier hängt die Kraft weder von der Lage, noch seiner Geschwindigkeit oder der Zeit ab, so dass

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = \mathbf{C} \tag{1.15}$$

mit einer Konstante $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$ ist. Eine solche Kraft nennt man *homogen und zeitunabhängig*. Das *Schwerefeld der Erde* ist über weite Distanzen tatsächlich homogen – und zu irrsinnig guter Näherung auch zeitunabhängig. Dann ist einfach das zweite Newtonsche Gesetz

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{C}. \tag{1.16}$$

Durch zweimalige Integration lässt sich diese Differentialgleichung leicht lösen als

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2m}\mathbf{C}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \tag{1.17}$$

Dieses Gesetz beschreibt bei Vernachlässigung des Luftwiderstands – was eine mehr oder weniger brachiale Annahme sein kann – gut die Bewegung von Körpern im Schwerefeld.

1.3.2 Homogene und zeitabhängige Kräfte

Selbst wenn das Kraftfeld nur homogen, aber auch zeitabhängig ist, mit

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{c}(t). \tag{1.18}$$

und einer zeitabhängigen Funktion $\mathbf{c} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, können wir die Differentialgleichung noch leicht lösen. Wir finden

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t ds \int_0^s du \mathbf{c}(u) + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0, \tag{1.19}$$

als Integral über das Kraftfeld.

1.3.3 Harmonische Kräfte

Eine ebenso wichtige Situation ist die, bei der die Kraft auf einen Körper linear vom Ort abhängt,

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = -D\mathbf{r}(t), \tag{1.20}$$

mit einer Konstante $D > 0$. Man spricht dann von einem *harmonischen Kraftgesetz*. In der Tat ist die Rückstellkraft einer Feder sehr gut durch ein solches Gesetz beschrieben, sofern man die Feder nicht zu stark auslenkt, wie auch etwa ein Pendel bei kleinen Schwingungen [3]. Die Bewegungsgleichung ergibt sich so zu

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) + D\mathbf{r}(t) = 0, \tag{1.21}$$

wiederum eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Es ist leicht zu sehen, dass

$$\mathbf{r}(t) = \sin(\omega t)\mathbf{c}_1 + \cos(\omega t)\mathbf{c}_2 \tag{1.22}$$

mit

$$\omega^2 = \frac{D}{m} \tag{1.23}$$

wobei sowie $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^3$ Lösungen sind. Weitere Konstanten lassen sich in $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ absorbieren. Dies sind sinusartige, auch harmonisch genannte, Schwingungen, die bei Abwesenheit eines Dämpfungsterms für alle Zeiten oszillieren. Diese Situation werden wir uns etwas später in aller Ausführlichkeit vorknöpfen.

1.3.4 Gravitationskräfte

Die Gravitationskraft ist die wichtigste fundamentale Kraft, die in der Principia postuliert und diskutiert wird. Das Gravitationsgesetz nach Newton impliziert, dass sich alle Körper durch ihre Masse anziehen, mit einer Kraft, die vom Anstand der beiden Körper anhängt. Das von Newton vorgeschlagene Gesetz ist tatsächlich durch Experimente zu enormer Genauigkeit bestätigt und erlaubt auch die Herleitung der Keplerschen Gesetze, wie wir später sehen werden. Erst die Relativitätstheorie sagt kleine Korrekturen dieses Gesetzes voraus, die wiederum auch gut bestätigt wurden. Das Gravitationsgesetz ist so zentral, dass wir ihm einen eigenen Kasten widmen wollen.

[3] Es ist nicht ganz unironisch, dass dieses Federgesetz "Hookesches Gesetz" heißt. Zwar wird hier Hooke gewürdigt, allerdings war Hooke so ambitioniert, wie Newton ein Gebäude der theoretischen Mechanik aufzubauen. Man ist an die Aufdrucke von Hemden erinnert: "My sister went to x, and all I got was this lousy T-shirt". In der Tat ist Hooke prominent nur mit diesem Federgesetz verknüpft.

Gravitationsgesetz: Zwei Massenpunkte mit Massen m_1 und m_2 an Orten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ ziehen sich gegenseitig zur Zeit t mit einer Kraft

$$\mathbf{F}_{1,2}(t) = \gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)}{|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|^3} \tag{1.24}$$

an, wobei $\gamma > 0$ die Gravitationskonstante ist.

Hierzu sind einige Dinge zu sagen: Das Gravitationsgesetz hängt nur von dem vektoriellen Anstand der beiden Körper ab. $\gamma > 0$ ist eine Naturkonstante, die *Gravitationskonstante*. In MKSA-Einheiten lautet sie

$$\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3 \mathrm{kg}^{-1} \mathrm{s}^{-2}. \tag{1.25}$$

Das Abstandsgesetz der Kraft skaliert wie der inverse quadratische Abstand zwischen den Körpern, denn offensichtlich gilt

$$\mathbf{F}_{1,2} \sim \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}. \tag{1.26}$$

In der Tat wurde Newton historisch durch die Keplerschen Gesetze auf diese inverse quadratische Abhängigkeit geführt – die Keplerschen Gesetze lassen sich hieraus allerdings streng formal herleiten. Actio est reactio ist respektiert durch

$$\mathbf{F}_{1,2}(t) = -\mathbf{F}_{2,1}(t) \tag{1.27}$$

für alle Zeiten $t \geq 0$.

1.3.5 Träge und schwere Masse

Die vielleicht erstaunlichste Eigenschaft ist allerdings die, dass die Masse im Gesetz vorkommt. $m > 0$ haben wir zunächst als Parameter im zweiten Newtonschen Gesetz kennengelernt. Die Masse im Gravitationsgesetz übernimmt die Rolle der *schweren Masse*. Das Gravitationsgesetz postuliert nun (historisch tatsächlich ohne Kommentar, dass die träge und die schwere Masse gleich sind, bis auf eine universelle Proportionalitätskonstante, die stets in γ absorbiert werden kann. Es ist allerdings erstaunlich, dass die Masse, wie sie der Reaktion von Bewegungen von Körpern auf äußere Kräfte vorkommt, und die als Konstante im Gravitationsgesetz, bis auf eine universelle Konstante gleich sind.

1.3.6 Massenpunkte

Und noch ein subtiler Punkt taucht im Gravitationsgesetz auf, den man fast überlesen möchte. Dies ist der des Massenpunktes. Ein *Massenpunkt* ist die Idealisierung, bei der die gesamte Masse eines ausgedehnten Körpers in seinem Massenschwerpunkt vereinigt ist. Eine zentrale Einsicht Newtons war zu bemerken, dass für kugelsymmetrische

Objekte dies zu keiner weiteren Näherung führt und man exakt davon ausgehen kann, die Masse im Massenschwerpunkt zu vereinigen. Daher können insbesondere ausgedehnte Himmelskörper als Massenpunkte behandelt werden Diese Aussage, als Newtonsches Schalentheorem bekannt, war der Grund einer Verzögerung der Publikation der Prinzipia. Für andere Massenverteilungen gilt das Gesetz allerdings nicht, und man muss dann das Gravitationsgesetz als Integral über die Massenverteilung formulieren.

1.3.7 Leichte Körper im Gravitationsfeld

Interessant ist auch, eine leichte Masse $m > 0$ in dem Schwerefeld eines viel schwereren Körpers am Ort $\mathbf{s}$ zu betrachten. Die Kraft auf die leichte Masse im Ort $\mathbf{r}$ ist dann

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = m\xi \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}|^3}. \tag{1.28}$$

In der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = m\xi \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}|^3}, \tag{1.29}$$

in der $\xi > 0$ weitere Konstanten absorbiert, fällt die Masse m heraus: Die möglichen Bahnkurven sind dann also unabhängig von der Masse. Dies ist eine Konsequenz der – bis auf eine Konstante – Gleichheit von schwerer und träger Masse. Eine solche Kraft, die durch die Rückwirkung der kleinen Masse wenig beeinflusst wird, nennt man auch äußere Gravitationskraft: Die gibt gewissermaßen en festes Schwerefeld vor.

Die Schwerkraft an der Erdoberfläche ist tatsächlich sehr gut durch eine solche Situation beschrieben. Da über weite Gebiete die Gravitationskraft homogen ist, finden wir

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = m\mathbf{G}, \tag{1.30}$$

mit einem festen Vektor $\mathbf{G}$. Man findet $|\mathbf{G}| = 9.81\mathrm{ms}^{-2}$ für die *Erdbeschleunigung* an der Erdoberfläche (meist g genannt). Dieses Gesetz – das mit einem homogenen und zeitunabhängigen Kraftgesetz einhergeht – impliziert auch, dass bei Abwesenheit vom Luftwiederstand alle Körper gleich schnell zu Boden fallen. In Röhren, die vakuiert wurden, kann man dies eindrucksvoll experimentell bestätigen.

1.3.8 Coulomb-Gesetz

Das Coulomb-Gesetz nimmt eine ganz ähnliche Form wie das Gravitationsgesetz an, nur, dass es nicht die Gravitationskraft beschreibt, sondern die elektrostatische Anziehung geladener Körper. Die Kraft, die zwei ruhende Ladungen an den Orten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ und mit den Ladungen q_1 und q_2 aufeinander ausüben, wird erklärt durch

$$\mathbf{F}_{1,2}(t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)}{|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|^3}. \tag{1.31}$$

Hier ist $4\pi\epsilon_0 = 1.1126 \times 10^{-10}\mathrm{CV}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$. Die Struktur des Gesetzes ist also die gleiche wie des Gravitationsgesetzes. Die Konstante nimmt allerdings im Zahlenwert einen erheblich größeren Wert an als die des Gravitationsgesetzes. Dass die Gravitation dennoch eine relevante Kraft darstellt, liegt daran, dass es positive und negative Ladungen gibt, die ihren Einfluss aufeinander weitgehend kompensieren.

1.3.9 Geschwindigkeitsabhängige Kraftgesetze

Alle bisher betrachteten Kraftgesetze waren unabhängig von der Geschwindigkeit. Dadurch soll aber nicht der Eindruck entstehen, für alle wichtigen Kraftgesetze wäre die Geschwindigkeit irrelevant. Dies ist nicht der Fall. Ein wichtiges Beispiel ist die *Lorentz*-Kraft, die ein Teilchen mit elektrischer Ladung e erfährt, wenn es sich in einem elektrischen Feld und einem magnetischen Induktionsfeld bewegt, die durch andere Teilchen herrühren und die als vorgegeben angenommen sind. Sie lautet

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)). \tag{1.32}$$

Dieses Gesetz ist interessant, weil die Kraft durch das Kreuzprodukt bestimmt ist.

Eine weitere wichtige geschwindigkeitsabhängige Kraft ist die *Reibungskraft*, jedenfalls wenn die Geschwindigkeiten nicht zu groß sind. Der Luftwiderstand oder die Reibungskraft bei direktem Kontakt sind gut beschrieben durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = -\eta \mathbf{v}(t), \tag{1.33}$$

für $\eta > 0$. Bei noch größeren Geschwindigkeiten ist die Kraft nicht mehr linear in $\mathbf{v}(t)$, sondern in einer höheren Potenz. Schnelle Autofahrerinnen und Autofahrer werden das Phänomen kennen: Wenn man schnell fährt, erhöht sich der Kraftstoffverbrauch ganz erheblich.