Analytische Mechanik (20113401)
Vorlesender: Jens Eisert.
Kapitel 3: Vielteilchenprobleme

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 3

Vielteilchenprobleme

3.1 Vorbemerkungen

Während die bisherigen Überlegungen noch recht elementar waren und in der Physik – vielleicht nicht in der Methodik – sicher schon bekannt waren, wollen wir uns nun an die Beschreibung klassischer Systeme vieler Freiheitsgrade machen. “Viel” kann hier schon mehr als ein Freiheitsgrad meinen. In der Tat wollen wir uns besonders dem Zweikörperproblem widmen und die Keplerschen Gesetze herleiten – was ein historischer Erfolg der Newtonschen Gesetze war. Allgemeiner werden wir den Drehimpulserhaltungssatz und erneut den Energiesatz wie auch den Virialsatz diskutieren. “Viel” kann aber auch eine makroskopische Anzahl meinen, Ideen der statistischen Physik vorwegnehmend. Phasenräume kommen hier erstmals ins Spiel, wie sie eine schöne Visualisierung implizieren und in der statistischen klassischen Physik unabdingbar.

3.2 Wechselwirkende Körper

3.2.1 Bewegungsgleichungen vieler Punktteilchen

Im letzten Kapitel legten wir einen Schwerpunkt auf einzelne Körper, aber in der Tat können einige Einsichten unmittelbar auf eine Vielzahl wechselwirkender Punktteilchen übertragen werden. Wir betrachten also im folgenden ein System aus n Punktteilchen mit Orten $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ und Massen $m_1, \ldots, m_n$. Deren Bewegungsgleichungen lauten

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j(t) = \mathbf{F}_j(t), \tag{3.1}$$

für $j = 1, \ldots, n$. Hierbei ist $\mathbf{F}_j(t)$ zum Zeitpunkt t die Kraft, die auf das j-te Teilchen wirkt. Wir werden im folgenden annehmen, ein Kraftfeld verallgemeinernd, dass diese Kraft von der Form

$$\mathbf{F}_j(t) = \mathbf{g}_j(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t)) \tag{3.2}$$

ist mit Funktionen $\mathbf{g}_j : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^3$, die also von den Orten aller Teilchen (und des j-ten Teilchens selbst) abhängen. Die Gleichungen (3.1) und (3.2) sind also ein System von

$3n$ Differentialgleichungen. Wir werden später sehen, wie solche gekoppelten Differentialgleichungen gelöst werden können. Die Trajektoren sind bestimmt, sofern man die Anfangsbedingungen der n Orte $\mathbf{r}_1(0), \ldots, \mathbf{r}_n(0)$ und der n Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}_1(0), \ldots, \dot{\mathbf{r}}_n(0)$ festlegt. Dies sind $6n$ Anfangsbedingungen, die die Lösung dieser Differentialgleichung determiniert.

3.2.2 Kinetische Energie vieler Punktteilchen

Die Bildung des Skalarproduktes wie oben und die Integration von t_1 bis t_2 liefert nun

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}_j(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}_j(t)}{dt} dt, \tag{3.3}$$

was tatsächlich nichts anderes ist als

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}_j(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}_j(t)}{dt} dt, \tag{3.4}$$

mit

$$T(t) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2(t). \tag{3.5}$$

Dies ist die *kinetische Energie* eines Systems von n Punktteilchen, die sich als Summe der kinetischen Energien ergibt.

3.2.3 Ortskoordinaten

Wir können die Koordinaten zusammenfassen als

$$\bar{r}(t) := (\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t)) \in \mathbb{R}^{3n}. \tag{3.6}$$

Streng genommen ist die rechte Seite in $(\mathbb{R}^3)^{\times n}$, die wir aber mit einem offensichtlichen Isomorphismus mit $\mathbb{R}^{3n}$ identifizieren können. Das natürliche *Skalarprodukt von n Ortskoordinaten* von $\bar{r}(t)$ mit $\bar{r}'(t) := (\mathbf{r}_1'(t), \ldots, \mathbf{r}_n'(t))$ ist dann

$$\bar{r}(t) \cdot \dot{\bar{r}}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j(t) \cdot \mathbf{r}_j'(t). \tag{3.7}$$

Dieser Ausdruck hat nichts mit einer Mittelung zu tun: Stattdessen haben wir es einfach nur mit einem Vektor aller Ortskoordinaten aller n Teilchen zu tun. Ebenso haben wir eine allgemeine *Bahnkurve*

$$t \mapsto \bar{r}(t) \tag{3.8}$$

als Abbildung von $[0, \infty) \to \mathbb{R}^{3n}$. So können wir auch Kraftfelder zusammenfassen zu

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = (\mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t)), \ldots, \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t))). \tag{3.9}$$

Dies sieht unübersichtlicher aus, als es ist. Wir finden

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}_j(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}_j(t)}{dt} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \bar{g}(\bar{r}(t)) \cdot \frac{d\bar{r}(t)}{dt} dt \\ &= \int_{\bar{r}_1, C}^{\bar{r}_2} \bar{g} \cdot d\bar{r}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

wobei die rechte Seite als Wegintegral aufzufassen ist. Der Schritt von einem Teilchen zu vielen ist so also vorerst nur eine Änderung der Notation. Ein Kraftfeld $\bar{r} \mapsto \bar{g}(\bar{r})$ heisst dann konservativ, wenn das Wegintegral

$$\int_{\bar{r}_1, K}^{\bar{r}_2} \bar{g} \cdot d\bar{r}, \tag{3.11}$$

unabhängig vom Weg K ist, und nur von $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_2$ und der Durchlaufrichtung abhängt.

3.2.4 Allgemeiner Energiesatz

Alles Gesagte gilt so nach wie vor. Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn es ein Potentialfeld gibt $\bar{r} \mapsto U(\bar{r})$ gibt, mit

$$\mathbf{g}_j = -\nabla_j U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n), \tag{3.12}$$

wobei ∇_j der Gradient bezüglich der Koordinate $\mathbf{r}_j$ ist, abgekürzt als

$$\bar{g} = -\bar{\nabla} U. \tag{3.13}$$

Allgemeiner Energiesatz: Die *Gesamtenergie*

$$E = T(t) + U(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t)) \tag{3.14}$$

ist erhalten, wenn die Bahnkurve $t \mapsto \bar{r}(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung in einem konservativen Kraftfeld ist.

Es ist wichtig zu bemerken, dass Kraftfelder nicht nur dann konservativ sind, wenn die Teilchen nicht wechselwirken und sich jeweils in einem konservativen Kraftfeld sind: In der Tat können sie sehr wohl wechselwirken, wie wir gleich sehen werden.

3.2.5 Beispiel zweier wechselwirkender Punktteilchen

Das folgende Beispiel ist von dieser Art. Hier ist $n = 2$, wir betrachten also zwei Punktteilchen. Jedes dieser Teilchen übe auf das jeweils andere eine Kraft aus, die nur von $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ abhängt. Wir nennen zur Vereinfachung

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tag{3.15}$$

die vektorielle Verbindungslinie. Es ist

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1(t) = \mathbf{g}_1(\mathbf{r}_1(t),\mathbf{r}_2(t)) = -f(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \tag{3.16}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2(t) = \mathbf{g}_2(\mathbf{r}_1(t),\mathbf{r}_2(t)) = f(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \tag{3.17}$$

mit einer funktionalen Abhängigkeit $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, die wir zunächst offen lassen wollen. Hier sieht man das dritte Newtonsche Gesetz, in der Weise, dass

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{r}_1(t),\mathbf{r}_2(t)) = -\mathbf{g}_2(\mathbf{r}_1(t),\mathbf{r}_2(t)) \tag{3.18}$$

ist für alle Zeiten $t \geq 0$. Das Feld

$$\bar{r} \mapsto \bar{g}(\bar{r}) = (\mathbf{g}_1(\bar{r}),\mathbf{g}_2(\bar{r})) \tag{3.19}$$

ist nun tatsächlich ein konservatives Kraftfeld. Dies können wir sehen, indem wir ein Potentialfeld explizit konstruieren. Sei $x \mapsto U(x)$ eine Stammfunktion von $x \mapsto f(x)$, so erhalten wir

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{r}_1(t),\mathbf{r}_2(t)) = -\nabla_1 U(|\mathbf{r}(t)|), \tag{3.20}$$

und ebenso für das zweite Teilchen. Dies folgt aus der Kettenregel

$$-\nabla_j U(|\mathbf{r}|) = -U'(|\mathbf{r}|)\nabla_j \mathbf{r} = -f(|\mathbf{r}|)\nabla_j \mathbf{r}. \tag{3.21}$$

Hoffentlich sind die beiden Bedeutungen von unteren Indizes nicht verwirrend. Es ist ja

$$\nabla_1|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2| = \frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \tag{3.22}$$

und ebenso

$$\nabla_2|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2| = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \tag{3.23}$$

Bisher haben wir die Art des Kraftgesetzes völlig offengelassen. Eine plausible Wahl ist

$$f(x) = \gamma m_1 m_2 \frac{1}{x^2}, \tag{3.24}$$

was wir sofort als das Kraftgesetz des Gravitationsgesetzes identifizieren. Das Potentalfeld, die wir suchen, ist so gegeben durch

$$U(x) = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{x}. \tag{3.25}$$

Mit diesem Potential erhalten wir die Bewegungsgleichungen zweier Punktteilchen, die etwa Planeten beschreiben, die sich gravitativ anziehen. Bei dieser Bewegung ist die Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{r}}_1(t))^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{r}}_2(t))^2 + U(|\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t)|) \tag{3.26}$$

erhalten, wie für konservative Kraftfelder gefordert.

3.3 Impuls

3.3.1 Impuls und Massenschwerpunkt

Noch wichtiger als die Geschwindigkeit ist neben dem Ort der *Impuls* eines Teilchens,

$$\mathbf{p}_j(t) := m_j \dot{\mathbf{r}}_j(t), \tag{3.27}$$

hier des j-ten Teilchens mit Masse m_j. Der Impuls ist also nichts als die mit der Masse multiplizierte Geschwindigkeit, und $t \mapsto \mathbf{p}_j(t)$ ist die *Impulskurve*. Für viele Teilchen können wir den *Gesamtimpuls* schreiben als

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j(t) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{r}_j(t). \tag{3.28}$$

Der Ortsvektor des *Massenschwerpunktes* ist definiert durch

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{r}_j(t), \tag{3.29}$$

wobei die *Gesamtmasse*

$$m := \sum_{j=1}^{n} m_j \tag{3.30}$$

ist. Dieser Ortsvektor des Massenschwerpunktes wird sich passend verändern, wenn wie alle Koordinaten in der gleichen Weise verschieben. Wenn also für alle j

$$\mathbf{r}_j(t) \mapsto \mathbf{r}_j(t) + \mathbf{x} \tag{3.31}$$

ist, so transformiert sich – ganz wie erwartet – der Ortsvektor des Massenschwerpunktes als

$$\mathbf{R}(t) \mapsto \mathbf{R}(t) + \mathbf{x}. \tag{3.32}$$

Der Massenschwerpunkt bewegt sich tatsächlich wie ein Punktteilchen für sich. Wir erhalten

$$\mathbf{P}(t) = m\dot{\mathbf{R}}(t). \tag{3.33}$$

Es ist also $\mathbf{P}(t)$ gleichermaßen der Impuls eines Systems, das man sich aus den n Subsystemen zusammengesetzt vorstellt, mit der Masse $m = m_1 + \cdots + m_n$.

Das zweite Newtonsche Gesetz ist ausgedrückt in Impulsen gerade

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{F}_j(t), \tag{3.34}$$

also bewirkt eine angelegte Kraft eine Impulsänderung. In unserer obigen Notation, indem wir

$$\bar{p}(t) := (\mathbf{p}_1(t), \ldots, \mathbf{p}_n(t)) \tag{3.35}$$

schreiben, ergibt sich die Newtonsche Bewegungsgleichung zu

$$\dot{\bar{p}}(t) := \bar{F}(t). \tag{3.36}$$

Hier ergibt sich eine spannende Subtilität. Diese Formulierung des zweiten Newtonschen Gesetzes ist tatsächlich allgemeiner als die im ersten Kapitel angegeben: Denn es könnte die Masse ja auch zeitlich veränderlich sein, wie bei einer Rakete. Tatsächlich gilt Gleichung (3.36), auch wenn $\mathbf{p}_j(t) = m_j(t)\dot{\mathbf{r}}_j(t)$ ist.

3.3.2 Impulsbilanz

Wir können die Kräfte auf ein Punktteilchen bilanzieren als äußere Kräfte und solche, die zwischen den Teilchen wirken. So gelten die Bewegungsgleichungen als

$$\dot{\mathbf{p}}_j(t) = \mathbf{F}_j(t) + \sum_{k=1, k\neq j}^{n} \mathbf{F}_{j,k}(t) \tag{3.37}$$

für $j, k = 1, \ldots, n$, mit

$$\mathbf{F}_{j,k}(t) = -\mathbf{F}_{k,j}(t) \tag{3.38}$$

nach dem dritten Newtonschen Gesetz. Es folgt so die folgende Impulsbilanz.

Impulsbilanz: Die Änderung des Gesamtimpulses ist gleich der Summe der äußeren Kräfte,

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{\mathbf{p}}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j(t). \tag{3.39}$$

Verschwindet diese Summe, so ist

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = 0, \tag{3.40}$$

auf Impulserhaltungssatz genannt.

Letzteres ist insbesondere dann der Fall, wenn ein System abgeschlossen ist, und so

$$\mathbf{F}_j(t) = 0 \tag{3.41}$$

gilt für alle $j = 1, \ldots, n$ und alle Zeiten $t \geq 0$. Ein Gesamtsystem bewegt sich also wie ein freies Teilchen, wenn man von der inneren Bewegung der Teilchen untereinander einmal absieht. Wenn doch äußere Kräfte wirken, so ist die Beschleunigung der Schwerpunktbewegung durch die Gesamtmasse

$$m = \sum_{j=1}^{n} m_j \tag{3.42}$$

und die gesamte äußere Kraft

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j(t) \tag{3.43}$$

bestimmt.

3.3.3 Erneut das Beispiel zweier wechselwirkender Punktteilchen

Wir kehren nun zum Problem zweier wechselwirkender Punktteilchen zurück. In dem oben diskutierten Zweikörperproblem mit den Bewegungsgleichungen

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1(t) = -f(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}, \tag{3.44}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2(t) = f(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \tag{3.45}$$

sind keine äußeren Kräfte angelegt. Die Addition der beiden Gleichungen führt so zu

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1(t)+m_2\ddot{\mathbf{r}}_2(t) &= m\ddot{\mathbf{R}}(t) \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1(t)+\mathbf{p}_2(t)) \\ &= \dot{\mathbf{P}}(t)=0. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Für die Schwerpunktbewegung gilt also

$$\mathbf{R}(t)=\mathbf{R}(0)+\dot{\mathbf{R}}(0)t \tag{3.47}$$

für $t \geq 0$. Die Schwerpunktbewegung folgt also einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung. Da diese Schwerpunktbewegung drei Koordinaten umfasst, haben wir von sechs Differentialgleichungen damit schon drei gelöst. Wir wollen uns nun den verbleibenden drei Gleichungen widmen. Hier wollen wir das Augenmerk auf den Verbindungsvektor $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ legen. Da

$$\ddot{\mathbf{r}}_1(t) = -\frac{1}{m_1}f(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \tag{3.48}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2(t) = \frac{1}{m_2}f(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{3.49}$$

gilt, erhalten wir durch Subtraktion

$$\ddot{\mathbf{r}}(t)=\ddot{\mathbf{r}}_1(t)-\ddot{\mathbf{r}}_2(t) = -\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)f(|\mathbf{r}(t)|)\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}. \tag{3.50}$$

Der Massenterm, der auf der rechten Seite steht, ist interessant. Schreiben wir

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}, \tag{3.51}$$

so dass also

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}, \tag{3.52}$$

so finden wir die Bewegungsgleichung (die explizite Zeitabhängigkeit einmal unterdrückend)

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -f(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \tag{3.53}$$

Dies ist deswegen spannend, weil dies die Bewegungsgleichung eines Teilchens mit der Masse $\mu > 0$ ist. Dies ist die *Bewegungsgleichung für die Relativbewegung*. Man nennt μ die *reduzierte Masse* des Zweiteilchensystems. Wenn die Massen etwa gleich schwer sind, also wenn $m_1 \approx m_2$ gilt, so ist $\mu \approx m_1/2$, also gerade die halbe Masse. Ist eine Masse viel schwerer als die andere, also gilt $m_1 \ll m_2$, so gilt

$$\mu = \frac{m_1}{1 + m_1/m_2} \approx m_1. \tag{3.54}$$

Eine solche Situation liegt etwa vor bei dem Zweiteilchenproblem aus Erde und Sonne: Die reduzierte Masse ist da im wesentlichen gleich der Erdmasse. Wir wollen diese Bewegungsgleichung nun lösen, haben damit aber nicht mehr viel zu tun. Die Schwerpunktsbewegung kennen wir ja bereits, und müssen nun noch die der Relativbewegung lösen. Diese ergibt sich aber nach der obigen Bewegungsgleichung als die Bewegung eines Teilchens mit Masse $\mu > 0$ unter dem Einfluss einer Kraft, bei der sich das Kraftzentrum unbeweglich im Ursprung befindet. Auch die Energie

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + U(|\mathbf{r}|) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2(t) + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2(t) + U(|\mathbf{r}|) \end{aligned} \tag{3.55}$$

kann man so bilanzieren in die Energie der Schwerpunkts- $\frac{1}{2} E_S := m\dot{\mathbf{R}}^2(t)$ und der Relativbewegung $E_R := \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2(t) + U(|\mathbf{r}|)$. Dies sieht man wie folgt. Es gelten ja

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2(t) = \frac{1}{2} m \frac{1}{m^2} (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1(t) + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2(t))^2 \tag{3.56}$$

und

$$\frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2(t) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m} (\dot{\mathbf{r}}_1(t) - \dot{\mathbf{r}}_2(t))^2. \tag{3.57}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1^2(t) \frac{1}{2m} \left(m_1^2 + m_1 m_2 \right) &+ \dot{\mathbf{r}}_2^2(t) \frac{1}{2m} \left(m_2^2 + m_1 m_2 \right) \\ &+ \dot{\mathbf{r}}_1^2(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2^2(t) \frac{1}{m} (m_1 m_2 - m_1 m_2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2(t). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Man kann dieses Vorgehen auch Auffassen als Übergang zu einem neuen, einem geeigneteren, Koordinatensystem. Anstatt die Koordinaten der Teilchen einzeln zu betrachten, $\mathbf{r}_1(t)$ und $\mathbf{r}_2(t)$, diskutiert man die der Schwerpunktsbewegung $\mathbf{R}(t)$ und der Relativbewegung $\mathbf{r}(t)$. In der Situation, in der die Schwerpunktbewegung unbeschleunigt ist, also $\dot{\mathbf{R}}(t)$ konstant ist, sind auch die Energien der Schwerpunkts- und Relativbewegung einzeln erhalten.

3.3.4 Allgemeine Schwerpunkt- und Relativbewegung

Ein solches Vorgehen ist tatsächlich auch ganz allgemein möglich, für ein abgeschlossenes Vielteilchensystem auf das keine äußeren Kräfte wirken. Wir betrachten hierfür wieder ein System aus n Teilchen, mit dem Vektor des Schwerpunkts $\mathbf{R}(t)$. Wir können neue Ortskoordinaten $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ einführen, die mit den alten zusammenhängen wie

$$\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{r}_j(t) - \mathbf{R}(t), \tag{3.59}$$

für $j = 1, \dots, n$. Dies ist eine hilfreiche Konvention, weil so natürlich

$$\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t) = \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_k(t) \tag{3.60}$$

gilt für alle Zeiten $t \geq 0$ und $j, k = 1, \dots, n$, und gleichermaßen der Ortsvektor des Massenschwerpunktes als

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{r}_j(t) = 0 \tag{3.61}$$

verschwindet. Die kinetische Energie ist in alten und neuen Koordinaten gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j (\dot{\mathbf{R}}(t) + \dot{\mathbf{x}}_j(t))^2. \tag{3.62}$$

Wegen der obigen Wahl ist dies aber gerade

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}(t)^2 + \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{x}}_j(t))^2, \tag{3.63}$$

da die weiteren Terme verschwinden. Die Gesamtenergie ist

$$E = T + \sum_{j,k=1, j<k}^{n} V_{j,k}(|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)|). \tag{3.64}$$

Auch diese Gesamtenergie, die bei konservativen Kräften nur als Gesamtenergie erhalten ist, lässt sich bilanzieren als die (kinetische) Energie der Schwerpunktsbewegung

$$E_S = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}(t)^2 \tag{3.65}$$

und der Gesamtenergie der Relativbewegung

$$E_R = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j(t)^2 + \sum_{j<k} V_{j,k}(|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)|. \tag{3.66}$$

So ergeben sich auch die Bewegungsgleichungen der Schwerpunktsbewegung

$$m \ddot{\mathbf{R}}(t) = 0, \tag{3.67}$$

eine geradlinig-gleichförmige Bewegung definierend, und

$$m_j\ddot{\mathbf{r}}_j(t) = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \mathbf{F}_{j,k}(\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)). \tag{3.68}$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man

$$\sum_{j=1}^{n} m_j\ddot{\mathbf{r}}_j(t) = \sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{F}_{j,k}(\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)) = 0, \tag{3.69}$$

verwendend, dass

$$\sum_{j=1}^{n} m_j\mathbf{x}_j(t) = 0 \tag{3.70}$$

weil dies die Koordinaten sind, in denen der Massenschwerpunkt im Ursprung ist und

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{F}_{j,k}(\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)) = 0, \tag{3.71}$$

weil keine äußere Kräfte anliegen. Die Tatsache, dass wir n Gleichungen addieren können und man ein trivial verschwindendes Ergebnis sieht, zeigt, dass die Gleichungen nicht linear unabhängig sein können. Eine Koordinate ist also definiert durch die Sammlung aller $n-1$ anderen Koordinaten. Durch Abspalten der Schwerpunktbewegung erhält man so effektiv also ein System von $n-1$ Teilchen. Der obige Fall von $n=2$, also zwei Teilchen, ist hier eingeschlossen.

3.3.5 Vielteilchenbewegung unter äußeren Kräften

Übrigens verwendete das obige Argument, dass keine äußere Kräfte anliegen. Wenn man ein externes Potential vorliegen hat, so wird für das Potential, dem das j-te Teilchen ausgesetzt ist,

$$V_j(\mathbf{r}_j(t)) = V_j(\mathbf{R}(t) + \mathbf{x}_j(t)) \tag{3.72}$$

gelten. Diesen Ausdruck kann man aber nicht mehr bilanzieren. Eine Aufspaltung in Schwerpunktsanteil und Relativanteil ist so also nicht mehr möglich.

3.3.6 Gezeitenkräfte

Äußere Gravitationskräfte sind auch äußere Kräfte (wie ihr Name suggeriert), wenn wir also etwa das Schwerefeld der Sonne oder der Erde als gegeben annehmen. Allerdings haben sie eine interessante Eigenschaft, nämlich von der Masse abhängig zu sein. Es ist

$$\mathbf{F}_j(\mathbf{r}_j(t)) = m_j\mathbf{G}(\mathbf{r}_j(t)) = m_j\mathbf{G}(\mathbf{R}(t) + \mathbf{x}_j(t)) \approx m_j\mathbf{G}(\mathbf{R}(t)), \tag{3.73}$$

wenn das vorgegebene Gravitationsfeld sich wenig ändert über die Größenordnungen, über die die Sammlung von Teilchen $j = 1, \ldots, n$ ausgedehnt ist. So findet man doch eine geschlossene Bewegungsgleichung für den Massenschwerpunkt als

$$m\ddot{\mathbf{R}}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j(\mathbf{r}_j(t)) \approx \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{G}(\mathbf{R}(t)) = m\mathbf{G}(\mathbf{R}(t)), \tag{3.74}$$

als eine geschlossene Gleichung. Ebenso erhält man Gleichungen für die Relativvektoren $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$, die zu dieser Approximation nur von den relativen Abständen abhängen,

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) \approx \mathbf{F}_j(\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)). \tag{3.75}$$

Dies gilt nur in einer gewissen Approximation: Etwa würde sich ein Haufen von Partikeln im Weltraum in einer Weise bewegen, dass die Schwerpunktbewegung abseparierbar ist, dies wäre aber zunehmend weniger der Fall, in der das Schwerefeld der Erde nicht homogen ist auf der Skala der Ausbreitung der Partikel. Dann würde der Haufen zerfließen.

Eine derartige Abweichung von einem homogenen Schwerefeld wollen wir uns genauer ansehen. Wenn das Schwerefeld nicht exakt homogen ist, so kann man in einer Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j(\mathbf{R}(t) + \mathbf{x}_j(t)) &= \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{G}(\mathbf{R}(t) + \mathbf{x}_j(t)) \\ &= m\mathbf{G}(\mathbf{R}(t)) + \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{x}_j \cdot \nabla \mathbf{G}(\mathbf{R}(t)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j (\mathbf{x}_j(t) \cdot \nabla)^2 \mathbf{G}(\mathbf{R}) \\ &+ \mathbf{E}, \end{aligned} \tag{3.76}$$

wobei der Fehlerterm $\mathbf{E}$ von dritten Ableitungen von $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ abhängt. Der zweite Term, linear im Gradienten von $\mathbf{G}$, verschwindet allerdings wegen

$$\sum_{j=1}^{n} m_k \mathbf{x}_j(t) = 0 \tag{3.77}$$

für alle Zeiten. Solche Kräfte machen sich als *Gezeitenkräfte* bemerkbar, die etwa für Ebbe und Flut verantwortlich sind. Nota bene gibt es pro Tag zweimal Flut und nicht einmal. Solche Gezeitenkräfte machen sich erst in zweiter Ordnung in der Ausdehnung bemerkbar.

3.4 Phasenräume

3.4.1 Phasenraum von Vielteilchensystemen

Zuletzt in diesem Kapitel werden wir Phasenräume kennenlernen. Dies ist der Konfigurationsraum der analytischen Mechanik. Der *Phasenraum* für n Teilchen ist der $\mathbb{R}^{6n}$, dessen Elemente sind die zusammengefassten Orte und Impulse

$$P = (\bar{r}, \bar{p}) \tag{3.78}$$

der n Teilchen. Einer Bahnkurve ist so einer Kurve im Phasenraum

$$t \mapsto (\bar{r}(t), \bar{p}(t)) \tag{3.79}$$

zugeordnet. Die Vorgabe einer Anfangsbedingung für die Orte $\bar{r}(0)$ und der Impulse $\bar{p}(0))$ definiert die gesamte Bahnkurve für alle Zeiten. Der Zustand einer Vielzahl von Teilchen ist so eine Sammlung von Punkten im $\mathbb{R}^{6n}$. Ebenso kann man Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Phasenraum betrachten; dies wird in der statistischen Physik nützlich sein.

3.4.2 Bewegung des Pendels im Phasenraum

Für ein Teilchen in einer Dimension ist der Phasenraum besonders einfach: Er ist hier nichts anderes als der $P = \mathbb{R}^2$. Ein Punkt $(r, p) \in P$ bestimmt Ort und Impuls des Teilchens. Die Bahnkurve $t \mapsto (r(t), p(t))$ ist dann eine Kurve im $\mathbb{R}^2$. Ein plakatives Beispiel ist das Pendel im Phasenraum, das wir nun in einer Raumdimension ansehen. Wir haben im ersten Kapitel schon gesehen, dass eine Lösung

$$r(t) = r(0)\cos(\omega t) \tag{3.80}$$

ist mit

$$\omega^2 = \frac{D}{m}. \tag{3.81}$$

Im zweiten Kapitel haben wir gesehen, dass die potentielle Energie bei $t = 0$ maximal ist

$$U(r(0)) = \frac{D}{2} r(0)^2. \tag{3.82}$$

Für $t_1 := \pi/(2\omega)$ ist die potentielle Energie mit $U(r(t_1)) = 0$ verschwindend, aber die kinetische Energie maximal,

$$T(t_1) = \frac{D}{2} r(0)^2, \tag{3.83}$$

den gleichen Wert annehmend. Da dies

$$\frac{D}{2} r(0)^2 = \frac{m}{2} v(t_1)^2 = \frac{1}{2m} p(t_1)^2 \tag{3.84}$$

ist

$$p(t_1)^2 = Dmr(0)^2. \tag{3.85}$$

Dies ist der Impuls zum Zeitpunkt t_1. Man sieht sofort, dass die Bahnkurven im Phasenraum Ellipsen sind. Lenkt man anfangs das Pendel weniger aus, erhält man eine Ellipse, die eingeschlossen ist. Mit Reibung erhält man eine spiralförmige Trajektorie.