

**Analytische Mechanik (20113401)**

Vorlesender: Jens Eisert.

Kapitel 7: Hamiltonsche Mechanik





# Inhaltsverzeichnis

<b>7</b>	<b>Hamiltonsche Mechanik</b>	<b>5</b>
7.1	Vorbemerkungen . . . . .	5
7.2	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen . . . . .	5
7.2.1	Hamiltonsche Funktion . . . . .	5
7.2.2	Herleitung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen . . . . .	7
7.2.3	Phasenraum, reloaded . . . . .	8
7.2.4	Poissonklammern . . . . .	8
7.2.5	Ein kleines Beispiel . . . . .	9
7.3	Mathematisches Intermezzo . . . . .	10
7.3.1	Grundidee des Prinzips der stationären Wirkung . . . . .	10
7.3.2	Funktionale . . . . .	10
7.4	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	11
7.4.1	Formulierung des Prinzips . . . . .	11
7.4.2	Stationaritätsbedingungen und Euler-Lagrange-Gleichungen . . . . .	12
7.4.3	Noch ein kleines Beispiel . . . . .	13
7.4.4	Beweis des Hamiltonschen Prinzips . . . . .	14
7.4.5	Hamiltonsches Prinzip für Systeme mit Zwangsbedingungen . . . . .	15



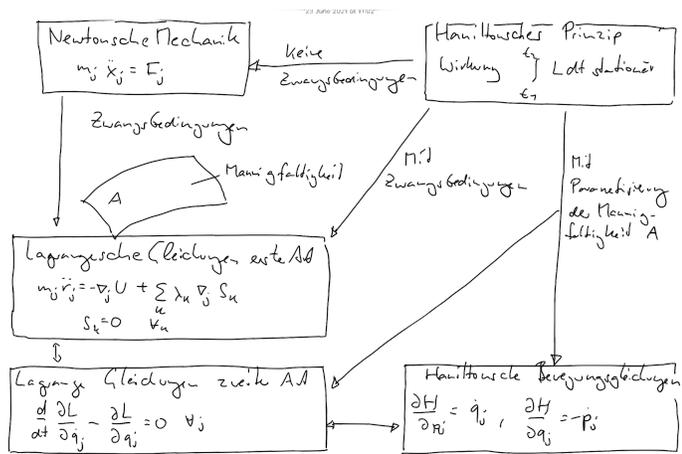
# Kapitel 7

## Hamiltonsche Mechanik

### 7.1 Vorbemerkungen

Ausgangspunkt der Vorlesung war die Newtonsche Mechanik, wie wir sie zwar in stärker mathematisierter Form behandelten, aber wie sie dennoch schon sicher in groben Zügen bekannt war. Dann folgte die Lagrangesche Mechanik, die zwar keine neue Physik vorschlug, aber dennoch einen ganz neuen Blickwinkel

auf die Mechanik eröffnete. Insbesondere sind in der Lagrangeschen Mechanik Zwangsbedingungen ganz natürlich und ohne große Mühe zu inkorporieren, während dies in der Newtonschen Mechanik nur unter größten Mühen möglich ist: Man müsste ja dann zu allen Zeiten die wirkenden Zwangskräfte genau kennen. Wir entwickelten so auch ein geometrisches Bild der Mechanik. Nun also die Hamiltonsche Mechanik?



## 7.2 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

### 7.2.1 Hamiltonsche Funktion

Wir haben im letzten Kapitel die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen kennengelernt. Die Lagrangefunktion ist eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und deren Ableitungen in der Zeit (und möglicherweise der Zeit selbst). Aus dieser Lagrangefunktion als Funktion von  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  – wobei wie oben  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_f)$  und  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$  – lassen sich die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen (die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art) herleiten, als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (7.1)$$

für  $j = 1, \dots, f$ . Die verallgemeinerten Impulse,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (7.2)$$

die wir oben kennenlernten, sind dann ebenso Funktionen von  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Nun nehmen wir an, dass man diese Beziehung auflösen kann, so dass man  $\dot{q}$  also Funktion von  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  erhält. Dies ist in kartesischen Koordinaten sicher möglich, da

$$\mathbf{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} = m_j \dot{\mathbf{r}}_j \quad (7.3)$$

ist und so

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \frac{\mathbf{p}_j}{m_j} \quad (7.4)$$

ist. Wir bilden die *Hamiltonfunktion*

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t). \quad (7.5)$$

Wiederum, in kartesischen Koordinaten ist dies

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (7.6)$$

also ist dann die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) &= \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \cdot \dot{\mathbf{r}}_j - L \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_j} + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n). \end{aligned} \quad (7.7)$$

So finden wir die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

**Hamiltonsche Bewegungsgleichungen:** Es gelten für die Hamiltonfunktion die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \dot{q}_j(t), \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\dot{p}_j(t). \quad (7.9)$$

So bestimmt also die Hamiltonfunktion die Zeitabhängigkeit der Koordinaten und Impulse.

### 7.2.2 Herleitung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

Tatsächlich sind diese Bewegungsgleichungen den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen äquivalent. Dies wollen wir nun zeigen. Es gilt nach Definition von  $H$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \sum_{k=1}^f \left( p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} \right) = \dot{q}_j \quad (7.10)$$

denn es ist ja

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (7.11)$$

Des weiteren ist

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}. \quad (7.12)$$

Nun können wir die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen (meint, die zweiter Art), anwenden, und sehen so

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -\dot{p}_j. \quad (7.13)$$

Dies sind aber gerade die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Umgekehrt folgt aus den Hamiltonschen Gleichungen sowie aus

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^f p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \dot{q}_j - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) \quad (7.14)$$

auch

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (7.15)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j \quad (7.16)$$

und somit auch

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \quad (7.17)$$

So folgen die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, und die Äquivalenz der Hamiltonschen und Lagrangeschen Bewegungsgleichungen ist gezeigt.

### 7.2.3 Phasenraum, reloaded

Wir werden noch einmal das Bild im Phasenraum absehen, und werden den Phasenraum beim deterministischen Chaos auch bald nochmal ansehen. Dies ist gerade für die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ein passendes Bild: Denn immerhin wird die Dynamik ja in den Koordinaten

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) \quad (7.18)$$

dargestellt: Einen wichtigen Unterschied zu den obigen Überlegungen gibt es allerdings schon, denn dies sind die verallgemeinerten Koordinaten und Impulse, die die physikalische Mannigfaltigkeit auch unter Zwangsbedingungen parametrisieren. Dennoch können wir den Raum des  $P = \mathbb{R}^{2f}$  wiederum als *Phasenraum* interpretieren. So entspricht der Dynamik von Teilchen wiederum einer parametrisierten Kurve

$$t \mapsto (q_1(t), \dots, q_f(t), \dots, p_1(t), \dots, p_f(t)). \quad (7.19)$$

In der Tat sind die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen gerade ein System von  $2f$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Anfangswerte sind

$$(q_1(0), \dots, q_f(0), \dots, p_1(0), \dots, p_f(0)) \in \mathbb{R}^{2f}, \quad (7.20)$$

ein Punkt im Phasenraum. Dann kann man durch Lösung der Differentialgleichungen gerade die Dynamik finden, also die parametrisierten Kurven ermitteln. Die Hamiltonschen Gleichungen sind für ein derartiges Studium von Bewegungen im Phasenraum also genau zugeschnitten.

### 7.2.4 Poissonklammern

Wie ändern sich Funktionen von (verallgemeinerten) Orten und Impulsen in der Zeit? Wir betrachten Funktionen  $f : \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}_0^+$ . Für solche Funktionen finden wir für die Ableitung in der Zeit

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) \quad (7.21)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right). \quad (7.22)$$

Die rechte Seite schreibt man auch als *Poissonklammer*: So werden die Gleichungen zu

$$\frac{d}{dt} f = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \quad (7.23)$$

**Poissonklammern:** Die Poissonklammern sind gegeben durch

$$\{f, H\} := \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right). \quad (7.24)$$

In der Tat gilt in der Quantenmechanik eine ganz ähnliche Aussage, dann von-Neumann Gleichung genannt, bei der Poissonklammern durch sogenannte Kommutatoren ersetzt werden. So ist auch klar, dass  $f$  genau dann eine erhaltene Größe ist bei Anwesenheit einer expliziten Zeitabhängigkeit, wenn

$$\{f, H\} = 0 \quad (7.25)$$

gilt. Etwa ist in einem translationsinvarianten Situation  $\{\mathbf{P}, H\} = 0$ , in einem rotations-symmetrischen Potential  $\{\mathbf{L}, H\} = 0$ , und der Drehimpuls ist erhalten. Man findet für die Poissonklammern die folgenden Eigenschaften:

$$\{A, B\} = -\{B, A\}, \quad (7.26)$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}, \quad (7.27)$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + \{A, C\}B, \quad (7.28)$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0. \quad (7.29)$$

Die letzte Identität, genannt Jacobi-Identität, ist besonders spannend, und gilt wiederum auch in der Quantenmechanik für Kommutatoren.

### 7.2.5 Ein kleines Beispiel

Wir wollen uns die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen anhand eines einfachen Beispiels ansehen: Ein Teilchen in einer Dimension ohne Zwangsbedingungen. Dann ist der Phasenraum wieder der  $\mathbb{R}^2$ . Ein Teilchen in einem Potential hat die Lagrange-funktion

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \mapsto L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q). \quad (7.30)$$

Wir finden

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad (7.31)$$

also ist die Hamiltonfunktion

$$(q, p, t) \mapsto H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{p^2}{2m} + U(q). \quad (7.32)$$

Für unser wohlvertrautes harmonisches Potential

$$U(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (7.33)$$

also

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (7.34)$$

Dies ist natürlich nichts anderes als die Energie, ausgedrückt in den richtigen Koordinaten. Die Hamiltonschen Gleichungen lauten

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (7.35)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q = -\frac{\partial U}{\partial q}, \quad (7.36)$$

was wiederum

$$m\ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0, \quad (7.37)$$

also hier

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (7.38)$$

impliziert. Die Bewegung ist, wie oben schon bemerkt, eine Ellipse mit Quadranten der Halbachsen

$$a^2 = \frac{2E}{m\omega^2}, \quad (7.39)$$

$$b^2 = 2mE. \quad (7.40)$$

Diese sind keine neuen Gleichungen, allerdings ist die Logik, die zu ihnen führt, durchaus eine andere. Nochmals, alles Gesagte gilt ebenso unter Anwesenheit von Zwangsbedingungen.

## 7.3 Mathematisches Intermezzo

### 7.3.1 Grundidee des Prinzips der stationären Wirkung

Wir werden nun uns noch ein Prinzip vergegenwärtigen, das mit obigen verwandt ist und das auch mit dem Namen Hamiltons verbunden ist. Es ist das Prinzip der stationären Wirkung, und somit der erste Kontakt mit einem Wirkungsprinzip. Um es gleich vorwegzunehmen: Eine Wirkung ist eine Eigenschaft einer parametrisierten Kurve, genauer einer Bahnkurve  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$  ausgehend von einem Zeitintervall  $I := [t_1, t_2]$ ,

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) \quad (7.41)$$

die wir nun zunächst wieder in kartesischen Koordinaten betrachten. Später werden wir wieder Zwangsbedingungen erlauben und verallgemeinerte Koordinaten ansehen. Wir werden solchen Bahnkurven eine *Wirkung* zuordnen. Die Bahnkurven, die den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen genügen, werden sich dadurch auszeichnen, dass die Wirkung *stationär* wird. Nota bene muss es nicht zwingend minimal werden, was interessant ist. Wir wollen uns nun etwas Zeit nehmen zu überlegen, was dies heißt.

### 7.3.2 Funktionale

Funktionale sind Funktionen, also ist es eher eine Frage der Konvention für eine bestimmte Klasse von Funktionen einen neuen Namen einzuführen. Die Quantenmechanik kennt auch nicht nur Operatoren, sondern auch Superoperatoren, die wiederum

Operatoren sind, nur eben in einem anderen Raum. So auch hier. Funktionale sind Funktionen von Funktionen. Mögliche Definitionsbereiche könnten die folgenden sein:

- $\mathcal{B}$ : Die Menge der glatten Bahnkurven  $K : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ .
- $\mathcal{B}_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}$ : Die Menge der glatten Bahnkurven  $[t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit festem Anfangs- und Endpunkt,  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2$ .

Für diese Situationen sehen wir uns einige Beispiele für Funktionale  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F : \mathcal{B}_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \rightarrow \mathbb{R}$  an. Es wird meist  $N = 3n$  sein, aber zur Vereinfachung der Notation werden wir dies lieber so notieren.

- $F(K) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(t)}$ , also die *Bogenlänge* der Kurve.
- Das *Wirkungsfunktional*, das uns besonders umtreiben wird, ist

$$S(K) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2(t) - U(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t)) \right). \quad (7.42)$$

- Für eine Lagrangefunktion  $L$ , hier in kartesischen Koordinaten, können wir auch

$$F(K) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \quad (7.43)$$

definieren.

Die ersten beiden genannten Funktionale sind lokal, in der Weise, dass sie nur vom Verhalten der Kurve an einem Punkt abhängen, die anderen nichtlokal, dass sie von der ganzen Kurve bestimmt sind. Funktionale sind Funktionen, also kann man von Stetigkeit und Differenzierbarkeit sprechen. Etwa heißt  $F$  differenzierbar, wenn

$$F(K + f) - F(K) = F'(K)f + O(\|f\|^2) \quad (7.44)$$

für ein lineares Funktional  $F'$ . Die Norm auf Funktionenräumen kann etwa

$$\|f\| = \int_{t_1}^{t_2} dt |\mathbf{f}(t)| \quad (7.45)$$

wählen.

## 7.4 Hamiltonsches Prinzip

### 7.4.1 Formulierung des Prinzips

Wir formulieren nun das Hamiltonsche Prinzip.

**Hamiltonsches Prinzip:** Eine Bahnkurve aus  $\mathcal{B}_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}$  ist genau dann Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j(t) + \nabla_j U(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t), t) = 0 \quad (7.46)$$

wenn sie ein stationärer Punkt des Wirkungsfunktionalis ist.

Das Wirkungsfunktional ist in Gleichung (7.72) beschrieben.

### 7.4.2 Stationaritätsbedingungen und Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir werden uns dieser Aussage in mehrere Schritten nähern. Wir finden, dass das Funktional

$$F(K) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \quad (7.47)$$

stetig und differenzierbar ist für alle  $K \in \mathcal{B}$ . Die Ableitungen im Punkte  $K$  ist gegeben durch das lineare Funktional

$$\begin{aligned} F'(K)h &= \left( \frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \right) \cdot \mathbf{r}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right) \cdot \mathbf{h}(t). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Hier haben die eine Notation benutzt, bei der

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right) \cdot \mathbf{h}(t) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial q_j}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right) h_j(t). \quad (7.49)$$

Dies finden wir durch direktes Nachrechnen: Es gilt

$$\begin{aligned} F(K+h) &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{r}(t) + \mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) + \dot{\mathbf{h}}(t), t) \quad (7.50) \\ &= F(K) + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\mathbf{h}} \right) + O(\|\mathbf{h}\|^2) \\ &= F(K) + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \cdot \mathbf{h} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \cdot \mathbf{h} \right) + O(\|\mathbf{h}\|^2) \\ &= F(K) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \mathbf{h} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \cdot \mathbf{h} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \cdot \mathbf{h} \right) \\ &+ O(\|\mathbf{h}\|^2) \end{aligned}$$

Dies ist genau, was zu zeigen war. Wenn wir zusätzlich die Funktionale auf  $\mathcal{B}_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}$  mit festem Anfangs- und Endpunkt einschränken, ist  $\mathbf{h}(t_1) = \mathbf{h}(t_2) = 0$ , und man findet

einfach

$$F'(K)h = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right) \cdot \mathbf{h}(t). \quad (7.51)$$

Wenn ein Funktional in  $K_0$  extremal wird ( $K_0$  ist hierbei eine Kurve), also ein lokales Minimum oder Maximum hat, so ist

$$F'(K_0) = 0, \quad (7.52)$$

also ist  $F'(K_0)h = 0$  für alle  $h$  mit  $\mathbf{h}(t_1) = \mathbf{h}(t_2) = 0$ . Nun wollen wir uns überlegen, was diese Extremalität der Wirkung von Bahnkurven für Konsequenzen hat.  $F'(K_0) = 0$  heißt, dass

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_0}(\mathbf{r}_0(t), \dot{\mathbf{r}}_0(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0}(\mathbf{r}_0(t), \dot{\mathbf{r}}_0(t), t) = 0 \quad (7.53)$$

für Zeiten  $t \in [t_1, t_2]$  sowie für die Endpunkte des Zeitintervalls

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0}(\mathbf{r}_0(t_1), \dot{\mathbf{r}}_0(t_1), t_1) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0}(\mathbf{r}_0(t_2), \dot{\mathbf{r}}_0(t_2), t_2) = 0, \quad (7.54)$$

weil die Ableitungen nach den Orten ja verschwinden. Auch das sehen wir recht schnell. Wenn

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \neq 0 \quad (7.55)$$

zu einem Zeitpunkt  $t_0 \neq \{t_1, t_2\}$  wäre, also einem Zeitpunkt verschieden von Anfangs- und Endzeitpunkt, gäbe es ein endliches Intervall  $I$  um  $t_0$ , in dem diese Größe auch verschieden von Null ist. Also kann man eine Kurve  $h$  finden mit  $\mathbf{h}(t_1) = \mathbf{h}(t_2) = 0$ , so dass

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right) \cdot \mathbf{h}(t) \geq 0 \quad (7.56)$$

implizierte. Also muss

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right) = 0 \quad (7.57)$$

gelten und auch Gleichung (7.54). Wenn  $K$  wieder auf  $\mathcal{B}_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}$  eingeschränkt ist, reduziert sich die Stationaritätsbedingung  $F'(K) = 0$  auf die folgende Gleichung.

**Euler-Lagrange-Gleichung:** Die Stationaritätsbedingung  $F'(K) = 0$  führt auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_0}(\mathbf{r}_0(t), \dot{\mathbf{r}}_0(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0}(\mathbf{r}_0(t), \dot{\mathbf{r}}_0(t), t) = 0. \quad (7.58)$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Bahnkurve, für welche  $K$  stationär wird. Die Kurve muss zusätzlich die Bedingungen

$$\mathbf{r}_0(t_1) = \mathbf{r}_1, \quad (7.59)$$

$$\mathbf{r}_0(t_2) = \mathbf{r}_2 \quad (7.60)$$

erfüllen.

### 7.4.3 Noch ein kleines Beispiel

Wir wollen, bevor wir uns dem Beweis des Hamiltonschen Prinzips widmen, ein kleines Beispiel ansehen für die *Bogenlänge* der Kurve

$$F(K) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(t)}, \quad (7.61)$$

in  $\mathcal{B}_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}$ . Es ist hier also

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}. \quad (7.62)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = 0. \quad (7.63)$$

Es ist ja

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \quad (7.64)$$

der Tangenteneinheitsvektor, der also längs einer stationären Kurve für die kürzeste Verbindung von  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  konstant sein muss. Diese kürzeste Kurve mit einem konstanten Tangenteneinheitsvektor ist also eine Gerade: Eine Gerade liefert in der Tat die kürzeste Verbindung.

### 7.4.4 Beweis des Hamiltonschen Prinzips

Ausgerüstet mit den Euler-Lagrange-Gleichungen können wir das Hamiltonsche Prinzip formulieren. Hierzu müssen wir zeigen, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für das Wirkungsfunktional

$$S(K) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2(t) - U(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t)) \right) \quad (7.65)$$

mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen übereinstimmt. Wenn wir von

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \dot{\mathbf{x}}_j^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (7.66)$$

ausgehen, der Lagrangefunktion in der Abwesenheit von Zwangsbedingungen, so sind

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_j} = -\nabla_j U \quad (7.67)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} = m_j \dot{\mathbf{r}}_j. \quad (7.68)$$

Wir werden den Fall von Zwangsbedingungen gleich nachlegen. Dann bedeutet die Euler-Lagrange-Gleichung also gerade

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j(t) + \nabla_j U(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t), t) = 0, \quad (7.69)$$

was das Hamiltonsche Prinzip ist. Es ist interessant zu bemerken, dass das Hamiltonsche Prinzip koordinatenunabhängig ist. Wenn wir eine Bahnkurve umparametrisieren, gilt das Hamiltonsche Prinzip in der gleichen Weise, wie man sich leicht vergegenwärtigt.

### 7.4.5 Hamiltonsches Prinzip für Systeme mit Zwangsbedingungen

Wir haben oben das Hamiltonsche Prinzip für Systeme ohne Zwangsbedingungen hergeleitet und so die Newtonsche Mechanik hergeleitet. Tatsächlich gilt das Hamiltonsche Prinzip auch für Systeme mit  $J$  Zwangsbedingungen, die wir hier als holonom annehmen wollen. Wir betrachten also wieder eine Mannigfaltigkeit  $A(t)$  mit  $f = 3n - J$  Freiheitsgraden. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{B}_{\bar{r}_1, \bar{r}_2}^{A(t)}$  die Bahnkurven

$$t \mapsto \bar{r}(t) \quad (7.70)$$

im  $\mathbb{R}^{3n}$ , die hier wieder die Bedingungen am Rand

$$\bar{r}(t_1) = \bar{r}_1, \quad \bar{r}(t_2) = \bar{r}_2 \quad (7.71)$$

erfüllen, aber für die zusätzlich  $\bar{r}(t) \in A(t)$  gilt. Eine Bahnkurve  $K \in \mathcal{B}_{\bar{r}_1, \bar{r}_2}^{A(t)}$  ist dann genau Lösung der Lagrangegleichung erster Art, wenn sie ein stationärer Punkt des Wirkungsfunktionalis ist

$$S(K) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2(t) - U(\bar{r}(t), t) \right) \quad (7.72)$$

ist. Der Beweis verläuft tatsächlich ganz analog wie oben. Allerdings sind nun virtuelle Verrückungen zugelassen, die tangential an  $A(t)$  verlaufen,

$$\bar{h}(t) = \delta_{A(t)} \bar{r}(t). \quad (7.73)$$

also gewissermaßen in der Mannigfaltigkeit bleiben. So ist nun

$$S(K + h) = S(K) + \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{\bar{p}}(t) + \nabla U(\bar{r}(t), t)) \delta_{A(t)} \bar{r}(t) + O(\|h\|^2). \quad (7.74)$$

Stationarität von  $S$  heisst nun, dass  $\dot{\bar{p}}(t) + \nabla U(\bar{r}(t), t)$  senkrecht auf  $A(t)$  ist, also dass

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\nabla U(\bar{r}(t), t) + \sum_{j=1}^J \lambda_j \nabla S_j(\bar{r}(t), t) \quad (7.75)$$

gilt. Das sind gerade die Lagrangegleichungen erster Art. Wir können aber im Sinne der Lagrangegleichungen zweiter Art gleich die Koordinaten  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_f)$  direkt auf  $A(t)$  einführen. Dann ist das Wirkungsfunktional

$$S(K) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (7.76)$$

Eine Bahnkurve ist also dann stationär, wenn

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (7.77)$$

gilt für alle  $j$ , also die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art erfüllt sind. Man kann also aus dem Hamiltonschen Formalismus die Newtonsche Mechanik, die Lagrangegleichungen erster Art und die zweiter Art herleiten.