Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2021

Übungsblatt 2
Vektorrechnung und Arbeit

Abgabe bis: 30.04.2021 um 12:00

---

1. **Rechnungen mit Gradient, Divergenz, und Rotation** [1 + 2 + 1 + 1 + 4 = 9 Punkte]

   Der Nabla-Operator ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch

   $$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \tag{1}$$

   Damit definieren sich der *Gradient* einer differenzierbarer Funktion f sowie die *Divergenz* und die *Rotation* eines differenzierbaren Vektorfeldes $\boldsymbol{A}$ wie folgt

   $$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} ; \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} ;$$

   $$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

   a) Ein Endpunkt einer massenlosen Feder mit Federkonstante k und Ruhelänge $\ell = 0$ ist an dem festen Punkt $(0, 0, 0)$ befestigt. Der andere Endpunkt kann sich frei in alle Richtungen bewegen, und daran wird eine Punktmasse mit Masse m befestigt. Geben Sie das Potential $V(\boldsymbol{r})$ für die Punktmasse an. Berechnen Sie die Kraft, welche auf die Punktmasse wirkt, wenn sich diese an einem Punkt $\boldsymbol{r}$ befindet, indem Sie den Gradienten des oben gefundenen Potentials berechnen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der bekannten Formel für Federkräfte.

   b) Auf einen Planeten der Masse m wirkt die Gravitationskraft eines Sterns der Masse M. Es gilt $M \gg m$ und es darf angenommen werden, dass der Stern fest am Punkt $(0, 0, 0)$ bleibt. Geben Sie das Potenzial des Planeten an. Berechnen Sie die Kraft, die auf den Planeten wirkt, indem Sie den Gradienten des Potentials ausrechnen und vergleichen Sie diese mit der bekannten Formel für die Gravitationskräfte zwischen zwei Massen.

   c) Sei $f(\boldsymbol{r})$ ein zweifach differenzierbares Skalarfeld. Berechnen Sie $\nabla \times (\nabla f)$.

   d) Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ein zweifach differenzierbares Vektorfeld. Berechnen Sie $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$.

   e) Sei $f(\rho, \varphi, z)$ ein Skalarfeld gegeben in den Zylinderkoordinaten $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Berechnen Sie die Darstellung von ∇f in diesen Koordinaten.

      Hinweis. (Eine Methode) Betrachten Sie eine Approximation erster Ordnung von f am Punkt $\boldsymbol{r}$ in Richtung $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, zuerst in den Argumenten ρ, φ, z von f und dann in kartesischen Koordinaten, und vergleichen diese.

2. **In einem Kraftfeld** [2 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte]

   Wir betrachten die Bewegung einer Punktmasse im $\mathbb{R}^3$. Auf die Masse wirkt ein Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (\lambda r_2, \lambda r_1, \mu)^T$, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ positive Konstanten sind und $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$.

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{F}$ eine konservative Kraft ist.

b) Die Punktmasse soll auf einer Geraden vom Punkt $\boldsymbol{q}_0 = (0,0,0)^T$ zum Punkt $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ verschoben werden. Berechnen Sie die dazu aufzuwendende Arbeit.

c) Geben Sie das Potential der Kraft $\boldsymbol{F}$ an.

d) Wir verschieben nun die Punktmasse längs der Koordinatenachsen nacheinander von $\boldsymbol{q}_0$ zu $\boldsymbol{q}$, d.h. entlang des Weges $(0,0,0)^T \rightarrow (q_1,0,0)^T \rightarrow (q_1,q_2,0)^T \rightarrow (q_1,q_2,q_3)^T$. Wie ändert sich die dazu aufzubringende Arbeit im Vergleich zu Aufgabenteil 2b?

3. **Newton vs. Galilei vs. Aristoteles** [2 Punkte]

Die moderne Formulierung von Bewegungsgleichungen beginnt mit Newton. Gedanken über freien Fall haben sich Menschen allerdings schon viel früher gemacht. Z.B. kam der griechische Philosoph Aristoteles zu dem naheliegenden Prinzip das schwere Objekte schneller fallen als leichte. Dem widersprach der Astronom Galilei und erdachte das folgende Gedankenexperiment:

Betrachte zwei Objekte A und B, wobei A schwerer ist als B. Kleben wir nun beide Objekte zusammen, so müsste A den Fall von B bremsen, gleichzeitig is das kombinierte Objekt aber schwerer als B und müsste nach unserer Annahme schneller fallen, was zum Widerspruch führt.

Welche versteckte Annahme macht Galilei in seiner Argumentation? Was macht Gravitation so besonders?