Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2021

Übungsblatt 3
Gekoppelte Schwingungen und Kurvenintegrale

Abgabe bis: 07.05.2021 um 12:00 Uhr

---

1. **Gekoppelte Federn** [2+2+2+2+1+2=11]

   Der Hochenergiephyiker Sidney Coleman sagte: "*Die Karriere junger theoretischer Physiker besteht darin den harmonischen Oszillator in aufsteigenden Leveln der Abstraktion zu studieren*". Hier wollen wir mit dieser Reise beginnen.

   Betrachte zunächst ein Objekt mit Masse m im Vakuum, dass durch eine Feder an einer Wand befestigt ist. Die Feder übt eine Kraft $F_\mathrm{F} = -kx$ auf die Masse aus, wobei x den Ort des Objekts bezeichnet und k die Federkonstante genannt wird.

   a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und finden Sie die allgemeine Lösung.

   Etwas komplexere Dynamik finden wir, wenn man zwei Objekte mit gleicher Masse m betrachtet. Diese Massen sind je mit einer von zwei gegenüberliegenden Wänden durch eine Feder mit Federkonstante K verbunden. Zusätzlich sind beide durch eine Feder mit Stärke k miteinander verbunden.

   b) Welche Kräfte wirken auf die beiden Massen? Schreiben sie die Bewegungsgleichung mithilfe einer Matrix M und einem Vektor $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2)^\mathrm{T}$ in der Form

   $$\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

   c) Finden Sie eine orthogonale Matrix (Rotationsmatrix) R und eine diagonale Matrix D, so dass $M = RDR^\mathrm{T}$.

   d) Nutzen Sie diese rotierte Eigenbasis um die Bewegungsgleichung allgemein zu lösen.

   e) Was passiert mit der Lösung im Limes $k \to \infty$ und was im Limes $K \to \infty$?

   f) In einem System seien n Objekte durch Federn gekoppelt, so dass sich die Bewegungsgleichung als $\ddot{\boldsymbol{r}} = M\boldsymbol{r}$ für eine symmetrische $n \times n$ Matrix M schreiben lässt. Welche physikalische Interpretation haben die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M?

2. **Wie man der Erde entflieht** [2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte]

   Wir definieren die *Fluchtgeschwindigkeit* eines Teilchens als die minimal notwendige Geschwindigkeit auf der Erdoberfläche, damit das Teilchen das Gravitationsfeld der Erde verlassen kann.

   a) Zeigen Sie, dass unter Vernachlässigung des Luftwiederstandes, sowie des Einflusses anderer Massen als der Erdmasse, die Fluchtgeschwindigkeit für die Erde 11.2 km/s beträgt.

   Wir würden gerne abschätzen wie viel Treibstoff notwendig ist, damit eine Rakete diese Fluchtgeschwindigkeit erreichen kann. Raketen werden durch den Gegenimpuls der am Heck ausgestoßenen Gase angetrieben. Das Verbrennen des Treibstoffes führt jedoch auch dazu, dass die Gesamtmasse der Rakete nicht konstant ist, sondern als Funktion der Zeit abnimmt.

b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung einer Rakete entlang der vertikalen Achse im homogenen Gravitationsfeld unter Vernachlässigung der Luftreibung gegeben ist durch

$$m\frac{dv}{dt} = -v_g\frac{dm}{dt} - mg.$$

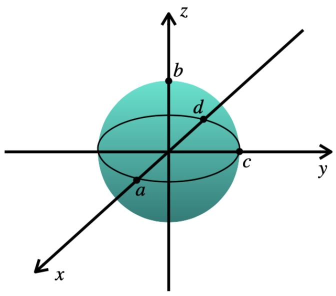
Hier sind m die Masse der Rakete und v_g die konstante Geschwindigkeit der Gase, die dem Düsenantrieb der Rakete entweichen.

c) Die Anfangsmasse der Rakete sei $m_0 = m_e + m_f$. m_e sei die Masse der leeren Rakete, und m_f sei die Anfangsmasse des Treibstoffes. Zusätzlich nehmen wir an, dass der Treibstoff mit konstanter Rate verbrennt wird, also $dm/dt = v_f =$ const.. Integrieren Sie die obige Bewegungsgleichung und bestimmen Sie $v = v(t\,; m_e,\, m_0,\, v_f,\, v_g,\, g)$.

d) Nehmen wir an, die Rakete sei anfänglich in Ruhe, dass $v_g = 2.07$ km/s, und dass die Rakete ein Sechzigstel seiner anfänglichen Treibstoffmasse pro Sekunde verbrennt. Zeigen Sie, dass unter diesen Bedingungen, ein Gewichtsverhältnis von $m_f/m_e \approx 300$ notwendig ist, damit die Rakete ihre Fluchtgeschwindigkeit erreichen kann. (Hinweis: Nehmen Sie bereits für die Rechnung an, dass $m_e \ll m_f$ gilt.)

3. **Kurvenintegrale auf der Kugeloberfläche** [1 + 1 + 1 + 3 = 6 Punkte]

Wir betrachten eine um den Koordinatenursprung zentrierte Sphäre mit Radius r, wie im folgenden Bild gezeigt.



Die Koordinaten der vier Punkte a, b, c und d sind gegeben durch:

$$a = (r, 0, 0), \qquad b = (0, 0, r), \qquad c = (0, r, 0), \qquad d = (-r, 0, 0)$$

a) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt a nach Punkt b an. In anderen Worten: Berechnen Sie eine Funktion $r(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$, sowie Werte t_1 und t_2, sodass $a = r(t_1)$, $b = r(t_2)$ und für alle $t_1 \le t \le t_2$ der Punkt $r(t)$ auf der Sphäre liegt.

b) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt b nach Punkt c an.

c) Geben Sie eine Parametrisierung der kürzesten Kurve entlang der Sphäre von Punkt c nach Punkt d an.

d) Betrachten Sie nun ein Teilchen, das sich nur auf der Oberfläche der Sphäre bewegen kann und berechnen Sie die von einem Kraftfeld $F(x, y, z) = (x^2, y^2, -xz)$ verrichtete Arbeit, wenn es das Teilchen entlang der oben formulierten Kurve von Punkt a nach Punkt b bewegt.