Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2021

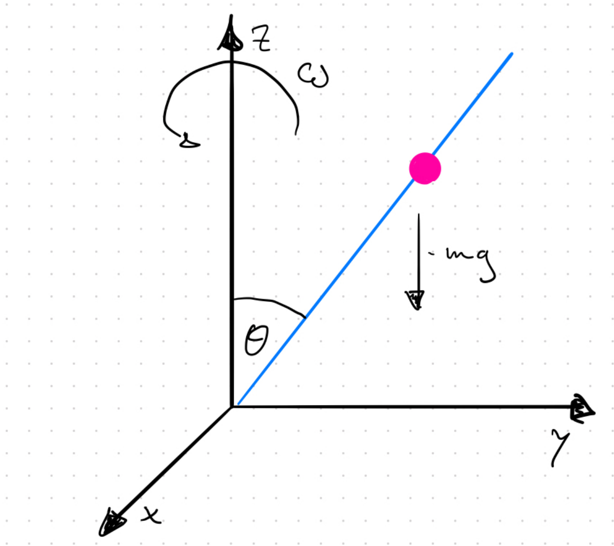
Übungsblatt 4
Zwangsbedingungen und Planeten

Abgabe bis: 14.05.2021 um 12:00 Uhr

---

1. **Perle auf Draht** $[2+2+2+1+1+1=9$ Punkte$]$

Wir betrachten eine Perle, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, die reibungsfrei auf einem Draht gleitet, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel θ um eine Achse rotiert. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.



In dieser Aufgabe wollen wir die Bewegung der Perle unter den gegebenen Zwangsbedingungen analysieren. Dazu eigenen sich natürlich Kugelkoordinaten. Den Ort der Perle geben wir mit $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$ an, wobei die Basisvektoren in Kugelkoordinaten wie folgt gegeben sind:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die zweifache Ableitung des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (bezüglich θ und ϕ) gegeben ist durch

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2\sin^2\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_r + 2\dot{r}\omega\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\phi - r\omega^2\sin\theta\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta. \tag{2}$$

Die Zwangsbedingungen führen dazu, dass neben der Schwerkraft zusätzliche *Zwangskäfte* auf die Perle wirken. In der Vorlesung werden Sie lernen, wie man geschickt mit Zwangsbedingunen und -kräften umgeht ohne großartig über sie nachdenken zu müssen. Hier wollen wir die Zwangskräfte jedoch zu Fuß ausrechnen. Jede Zwangskraft kann **nur senkrecht** zum Draht wirken, da ihr paralleler Anteil die Perle beschleunigen würde und somit nicht zur Einhaltung der Zwangsbedingung beiträgt.

b) Zeigen Sie, dass die Zentripetalkraft, die der Draht auf die Perle ausübt die Zwangskraft $\boldsymbol{F}_z = -m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ zur Folge hat.

c) Zeigen Sie, dass die konstante Rotation des Drahtes ein Drehmoment auf die Perle ausübt wenn diese ihren Ort ändert (wenn $\dot{r} \neq 0$) und dass daraus die Zwangskraft $\boldsymbol{F}_d = 2m\dot{r}\omega \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ erwächst. *Hinweis: Analog zum linearen Newtonschen Satz, $\dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{F}$, gilt in der Rotationsbewegung $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{D}$, wobei $\boldsymbol{L}$ der Drehimpuls und $\boldsymbol{D}$ das Drehmoment ist.*

d) Zeigen Sie, dass der relevante Teil der Gewichtskraft durch $\boldsymbol{F}_{g\|} = -mg\cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_r$ gegeben ist.

e) Zeigen Sie, wie sich mit den oben ausgerechneten Kräften die Differenzialgleichung

$$\ddot{r} - r\omega \sin^2\theta = -g\cos\theta \tag{3}$$

für die Bewegung der Perle ergibt. Diese brauchen Sie hier nicht lösen.

f) Bei welchem Abstand r wirkt entlang des Drahtes keine Kraft auf die Perle?

2. **Planetenbewegung** [$1 + 2 + 2 + 1 + 2 = 8$ Punkte]

In dieser Aufgabe betrachen wir zwei Planeten mit unterschiedlichen Massen $m_1 \neq m_2$, und Koordinaten $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, die sich umeinander bewegen. Die Gesamtenergie des Systemes sei gegeben durch

$$E(\dot{\mathbf{r}_1}, \dot{\mathbf{r}_2}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}_1}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}_2}^2 + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \qquad U(r) = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{4}$$

a) Drücken Sie die Energie $E(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{R}, \mathbf{r})$ in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten mit Gesamtmasse M und Relativmasse μ aus:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tag{5}$$

$$M = m_1 + m_2, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{6}$$

Identifizieren Sie die entkoppelten Energieterme für Schwerpunkts- und Relativbewegung. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktskoordinate her und lösen Sie diese.

Im folgenden betrachten wir nur noch den Energieterm assoziert mit der Relativbewegung. Um die Relativbewegung besser verstehen zu können, führen wir eine Koordinatentransformation in Zylinderkoordinaten durch $(r_1, r_2, r_3) \mapsto (\rho, \phi, z)$. Zylinderkoordinaten formen ein orthonormales Koordinatensystem und sind über folgende Einheitsvektoren definiert

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \ \hat{\mathbf{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \ \hat{\mathbf{e}}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

so dass

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z. \tag{8}$$

Die Einheitsvektoren in diesem Koordinatensystem sind explizit nicht konstant.

b) Wie lautet die Energie für die Relativbewegung in diesem Koordinatensystem?

Wie wir sehen, ist die Energie der Relativbewegung unabhängig vom Winkel ϕ (aber nicht unabhängig von $\dot{\phi}$). Wie Sie später in der Vorlesung lernen werden, hat diese *Rotationssymmetrie* des Potentials zur Folge, dass der Drehimpuls des Systemes

$$\mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = const.$$

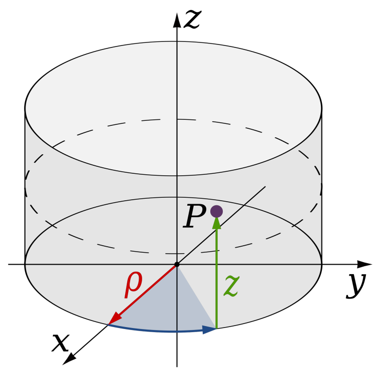


Abbildung 1: Zylinderkoordinaten.

erhalten ist. Da damit auch die Richtung von $\mathbf{L}$ konstant ist, und der hergeleitete Energieterm der Relativbegegung unabhängig der Orientierung der $\hat{\mathbf{e}}_z$-Achse ist, wählen wir das Koordinatensystem so, dass die $\hat{e}_z$-Achse in Richtung des Drehimpulses zeigt, sodass $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{e}}_z$.

c) Begründen Sie, warum das nur dann zulässig ist, wenn $\mathbf{L} = const.$ gilt.

In diesem Koordinatensystem gilt $z(t) = 0$. Die Relativkoordinate bewegt sich in diesem neuen Koordinatensystem also nur in der $x - y$-Ebene.

d) Begründen Sie dies.

e) Leiten Sie $L = L(\rho, \dot{\phi})$ her und setzen Sie $\dot{\phi} = \dot{\phi}(L)$ in den Energieausdruck der Relativbewegung ein. Identifizieren Sie den kinetischen- und Potentialterm der Relativbewegung in ρ und stellen sie die Bewegungsgleichung $\mu\ddot{\rho} =?$ auf.

   Hinweis: Verwenden Sie den ∇-Operator in Zylinderkoordinaten: $\hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$.

f) Skizzieren Sie das Potential für $3L^2 > 2\gamma\mu M$. Nähern Sie das hergeleitete Potential in zweiter Ordnung Taylorentwicklung um einen sinnvollen Punkt und lösen Sie die Bewegungsgleichung in dieser Approximation.