Freie Universität Berlin

Analytische Mechanik

Sommer-Semester 2021

Übungsblatt 5
Phasenräume und Hamiltonsches Prinzip

Abgabe bis: 21.05.2021 um 12:00 Uhr

---

1. **Phasenräume** $[a1 + b2 + c1 + d1 + e1 + f2 + g1 + h2 + i1 + j2 + k1 = 15 \text{ Punkte}]$

   Der Phasenraum bietet die Möglichkeit, komplexe Dynamiken auf eine einfache Art und Weise zu visualisieren, ohne dass dafür die vollständige Bewegungsgleichung gelöst werden muss. Zudem wird die Idee das Phasenraumes zentral sein für den Hamiltonformalismus, den wir später in der Vorlesung kennen lernen werden.

   In dieser Aufgabe wollen wir uns näher mit dem Phasenraum vertraut machen, verschiedene Bewegungen visualisieren und einige wichtige Eigenschaften des Phasenraumes herleiten. Zur Erinnerung: Der Phasenraum eines n-Teilchensystems im dreidimensionalen Raum ist gegeben durch den Vektorraum $\mathbb{R}^{6n}$ und ein Element in diesem Phasenraum ist ein Vektor $(\boldsymbol{x}_1^T, \ldots, \boldsymbol{x}_n^T, \boldsymbol{p}_1^T, \ldots, \boldsymbol{p}_n^T)^T$, wobei $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^3$ für $i = 1, \ldots, n$ die Orts- und Impulsvektoren der n Teilchen sind.

   Begnügen wir uns zunächst einmal mit einem einzigen Teilchen in einer Dimension. Dieses Teilchen habe eine Masse m und mit einer Feder mit Federkonstante k mit einer festen Wand verbunden. Die Bewegung sei reibungsfrei. Die Auslenkung aus der Gleichgewichtsposition bezeichnen wir mit x und den Impuls des Teilchens mit p.

   a) Was ist die Gesamtenergie des Teilchens als Funktion von x und p? Ist dies eine Erhaltungsgröße?

   Verschiedene Gesamtenergien E definieren nun Bahnen im Phasenraum, auf denen das Teilchen sich bewegen kann.

   b) Skizzieren sie diese Bahnen im Phasenraum für verschiedene Werte von $E = 0, 1, 4$ unter der Annahme, dass $k = 1$ und $m = 2$ gilt.

   Nun wollen wir die Bewegungsrichtung und -geschwindigkeit auf diesen Bahnen berechnen. Diese können wir als Tangentialvektoren an den Bahnen visualisieren. *(Anmerkung: Es geht hier um die Geschwindigkeit der Bewegung im Phasenraum — nicht um eine physikalische Geschwindigkeit der Masse m.)*

   c) Stellen Sie dazu die Bewegungsgleichung des Phasenraumvektors $(x, p)^T$ auf und geben Sie das resultierende *Geschwindigkeitsfeld* $\boldsymbol{f}(x, p) \in \mathbb{R}^2$ an.

   d) Zeichnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren an den Punkten der Bahnen, für die entweder $x = 0$ oder $p = 0$ gilt, in die Skizze aus Aufgabe 1b ein.

   Wir bezeichnen Punkte im Phasenraum, für die $\boldsymbol{f}(x, p) = (0, 0)^T$ gilt, als *Fixpunkte* der Bewegung.

   e) Welche Fixpunkte hat die Bewegung des Pendels?

   Die Annahme, dass das Teilchen sich reibungsfrei bewegt, ist natürlich eine starke Idealisierung. In der Realität wirkt zusätzlich zur Rückstellkraft der Feder noch eine Reibungskraft die Proportional zur Geschwindikgeit des Teilchens mit Proportionalitätskonstante μ wirkt. Allgemein können wir die Bewegungsgleichung eines Teilchens also schreiben als

   $$m\ddot{x} = F(x, p).$$

und in diesem Fall ist $F(x,p) = -kx - \eta\dot{x}$. Die Bewegungsgleichung ist nun deutlich komplizierter geworden. Mithilfe des Phasenraums können wir trotzdem auf eine einfache Art und Weise die Bewegungsform visualisieren. Dazu eliminieren wir die Abhängigkeit von der Zeit.

f) Zeigen Sie, dass die 'Steigung' der Bahnen für $p \neq 0$ durch die folgende Relation gegeben ist

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{mF(x,p)}{p},$$

Allgemein können wir diese Relation nun dazu verwenden, sogenannte *Isoklinen* zu bestimmen. Isoklinen sind Punkteschare im Phasenraum mit konstanter Steigung, also alle Punkte (x', p') an denen die $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = \alpha$ für eine Konstante α.

g) Berechnen Sie die Isoklinen des gedämpften harmonischen Oszillators, den wir hier betrachten?

h) Skizzieren Sie die Isoklinen für $\alpha = -2, -1, 0, 1, \infty$ und verwenden Sie diese, um die Bahnen der Bewegung zu skizzieren. Wir setzen $k = m = \eta = 1$.

   Hinweis: Dazu ist es hilfreich, die Steigung auf den Isoklinen zu visualisieren.

i) Ist die Energie des Teilchens nun noch erhalten? Warum?

In der Vorlesung haben Sie das effektive Potential des Zweikörperproblems im Zentralpotential V kennen gelernt als

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r).$$

j) Skizzieren Sie die Bahnen eines Teilchens im Zentralpotential $V(r) = -\xi r \mathrm{e}^{-r}$ für Energien $-10, -2, -1, 0, 1$ und zeichnen Sie die Isoklinen ein. Wir setzen $m = 1$ und $\xi = 10$.

k) Welche Formen der Bewegung treten auf?

2. **Variationsrechung und Hamiltonsches Prinzip** [6 + 3 + 3 = 12 Punkte]

Die Variationsrechnung ist eine vielseitige Methode, welche in Zusammenarbeit mit dem Lagrange-Formalismus zu einer vereinfachten Herleitung der Bewegungsgleichungen von Systemen in der klassischen Mechanik führen kann.

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, welches sich in 3 Dimensionen auf der Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ in einem Potential $V(\boldsymbol{r})$ bewegt. Die Lagrange-Funktion L ist gegeben durch $L = T - V$, wobei T die kinetische Energie des Systems ist. Für feste Werte t_0, t_1 mit $t_0 < t_1$ ist die *Wirkung* $S[\boldsymbol{r}(t)]$ definiert als

$$S[\boldsymbol{r}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t)\ . \tag{1}$$

Laut dem Hamiltonschen Prinzip ist die tatsächliche physikalische Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ so, dass die Wirkung extremal wird.

Die Variationsrechnung erlaubt uns, diese Extremalisierung zu bestimmen. Eine beliebige Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ für $t_0 \leq t \leq t_1$ sei gegeben. Man betrachte eine *Variation* $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) + \delta\boldsymbol{r}(t)$ mit einer infinitesimalen Verrückung $\delta\boldsymbol{r}(t)$ für jede t mit den Randbedingungen $\delta\boldsymbol{r}(t_0) = \delta\boldsymbol{r}(t_1) = 0$. (Im Folgenden wird das Argument (t) oft nicht explizit geschrieben.) Die Variation $\delta F[\boldsymbol{r}(t)]$ einer beliebigen Funktion $F[\boldsymbol{r}(t)]$ der Bahnkurve ist die infinitesimale Änderung von $F[\boldsymbol{r}(t)]$ in der erster Ordnung in $\delta\boldsymbol{r}(t)$. (Zum Beispiel für einen konstanten Vektor $\boldsymbol{a}$, kann man die Variation $\delta(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})$ finden durch $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r}$, sodass $\delta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{r}$; wären Terme höherer Ordnung in $\delta\boldsymbol{r}$ aufgetreten dann hätten wir diese weglassen können.) Die Funktion $F[\boldsymbol{r}(t)]$ wird genau dann extremalisiert, wenn $\delta F[\boldsymbol{r}(t)]=0$ für alle solche Verrückungen.

a) Sei $f(\boldsymbol{r})$ ein hinreichend glattes Skalarfeld und sei $g(x)$ eine Funktion mit Ableitung $g'(x)$. Zeigen Sie:

   (i) $\delta(\boldsymbol{r}^2(t))=2\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}$;

   (ii) $\delta\big(\sqrt{f(\boldsymbol{r})}\big)=\frac{1}{2\sqrt{f(\boldsymbol{r})}}\,\delta f(\boldsymbol{r})$;

   (iii) $\delta\, g(f(\boldsymbol{r}))=g'(f(\boldsymbol{r}))\,\delta f(\boldsymbol{r})$;

   (iv) $\delta f(\boldsymbol{r})=(\nabla f)\cdot\delta\boldsymbol{r}$;

   (v) $\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}=\delta\dot{\boldsymbol{r}}$;

   (vi) $\delta\int_{t_0}^{t_1} f(\boldsymbol{r})\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta f(\boldsymbol{r})\,dt$.

b) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich frei in 3 Dimensionen bewegen kann. Berechnen Sie die Variation der Wirkung, und zeigen Sie, dass diese genau dann immer verschwindet, wenn $\boldsymbol{r}(t)$ eine gleichförmige Bewegung ist.

   Hinweise: Verwenden Sie eine partielle Integration. Zudem wird verlangt, dass die Variation $\delta S[\boldsymbol{r}(t)]$ für alle beliebige Variationen $\delta\boldsymbol{r}(t)$ mit $\delta\boldsymbol{r}(t_0)=\delta\boldsymbol{r}(t_1)=0$ verschwindet.

c) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich in 3 Dimensionen in dem Potential $V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}m|\boldsymbol{r}|^2$ bewegen kann. Berechnen Sie die Variation der Wirkung, und leiten Sie die Bewegungsgleichung her (diese muss hier nicht gelöst werden).