Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2021

Übungsblatt 6
Runge-Lenz Vektor und Lagrange-Gleichungen 1. Art

Abgabe bis: 28.05.2021 um 12:00 Uhr

---

1. **Runge-Lenz Vektor** [1 + 4 = 5 Punkte]

   In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einer Besonderheit des Kepler-Problems: Neben der Energie und dem Drehimpuls gibt es noch eine weitere Erhaltungsgröße. Betrachten Sie dazu ein Teilchen der Masse m im Gravitationspotential $U : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $U(r) = -\xi/r$ mit $\xi = \gamma M m$ und γ der Gravitationskonstante, eines Objekts mit Masse M und mit Drehimpuls $\boldsymbol{L}$. Der sogenannte *Runge-Lenz Vektor* ist definiert als die Größe

   $$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L} - \gamma M m \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

   mit $r = |\mathbf{r}|$.[1]

   a) Warum liegt der Runge-Lenz Vektor $\boldsymbol{A}$ in der Bahnebene?

   b) Zeigen Sie das $\boldsymbol{A}$ eine Erhaltungsgröße ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$.)

2. **Taylorreihe** [3 + 1 + 1 + 3 = 8 Punkte]

   a) Leiten Sie die Eulersche Formel

   $$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

   mit Hilfe eines Taylor-Reihen Ansatzes her.

   b) Erläutern Sie den Zusammenhang mit der Exponentialdarstellung einer komplexen Zahl.

   c) Welche Formel ergibt sich für den Spezialfall $x = \pi$ und erläutern Sie die Besonderheit.

   d) Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Ausdrücken bis zur 2. Ordnung in x in der Umgebung von $x \approx 0$. (Wir nehmen an, dass $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.)

      i) $\frac{d+ex}{a+bx+cx^2}$;

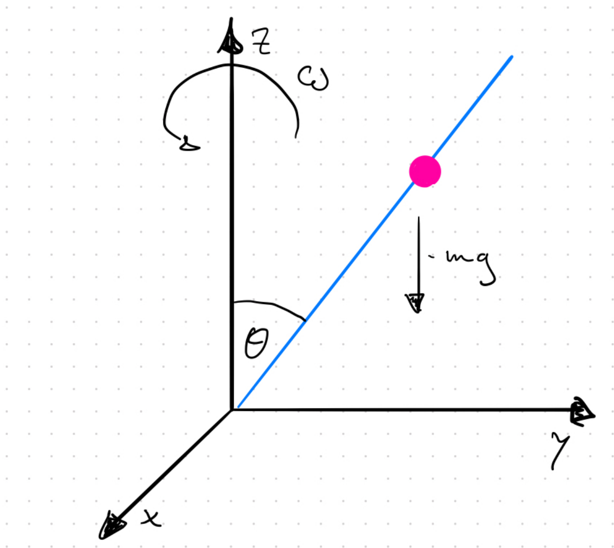
      ii) $\frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

      iii) $\ln(a\cos(x) + b\sin(x))$.

3. **Perle auf Stab** $[2 + 4 + 2 + 4 = 12$ Punkte$]$

   Wir betrachten eine Perle, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, die reibungsfrei auf einem Draht gleitet, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel θ um eine Achse rotiert. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.

[1] Eine alternative, äquivalente Definition des Runge-Lenz Vektors ist $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \xi m \frac{\boldsymbol{r}}{r} = m\boldsymbol{A}$.



In einer vorherigen Aufgabe haben wir die Zwangskräfte für dieses System bereits aus bekannten Formeln wie beispielsweise der Zentripetalkraft für Kreisbewegungen berechnet. Nun wollen wir die Zwangskräfte mit Hilfe des Lagrange-Formalismus direkt aus den Zwangsbedingungen berechnen.

Dazu eigenen sich natürlich wiederum Kugelkoordinaten. Der Ort der Perle ist gegebn durch $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$. Die Basisvektoren in Kugelkoordinaten sind folgt gegeben :

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Zwangsbedingungen $S_j(\boldsymbol{r}, t)$ für die Bewegung der Perle an.

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass sogenannte *Zwangskräfte* $\lambda_j \nabla S_j$ mit Lagrange Multiplikatoren $\lambda_j \in \mathbb{R}$ die Bedingungen S_j in der Bewegung erzwingen.

b) Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1. Art auf.

Hinweis 1: Die Beschleunigung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) *ist gegeben als*

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\vartheta + ((r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\vartheta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta))\boldsymbol{e}_\varphi$$

Hinweis 2: In Kugelkoordinaten ist ∇ *gegeben durch:*

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

c) Bestimmen Sie explizit die wirkenden Zwangskräfte in Abhängigkeit von $\vartheta, \omega, r, \dot{r}$.

Hinweis: Setzen Sie die Zwangsbedingungen in die anderen Gleichungen ein und bestimmen Sie λ_j.

Nach Einbeziehung der Zwangsbedingungen und Zwangskräfte gilt für die $\boldsymbol{e}_r$-Komponente folgende Bewegungsgleichung:

$$m(\ddot{r} - r\sin^2(\theta)\omega^2) = -mg\cos\theta$$

d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangswerte $r(t=0) = r_0, \dot{r}(t=0) = 0$.

Hinweis: Nutzen Sie hierbei, dass Sie in einem früheren Aufgabenblatt schon eine spezielle Lösung gefunden haben:

$$\ddot{r} = 0 \quad \text{für} \quad r = \frac{g\cos(\theta)}{\omega^2 \sin^2(\theta)}$$