Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2021

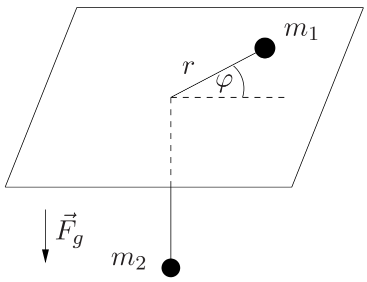
Übungsblatt 7
Bewegung unter Zwangsbedingungen

Abgabe bis: 04.06.2021 um 12:00 Uhr

---

1. **Verbundene Massen mit planarer Zwangsbedingung** [4 + 2 + 3 + 2 + 4 = 15 Punkte]

Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch einen Faden der Länge L verbunden, der durch ein Loch in einer horizontalen Fläche (der $(x-y)$-Ebene) verläuft. Die Masse m_1 gleitet reibungslos auf der horizontalen Fläche, während m_2 senkrecht nach unten hängt und sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegt.



a) Unter der Annahme, dass das Faden straff bleibt, bestimmen Sie die Zwangsbedingung für dieses Problem und stellen die Lagrange-Gleichungen der 1. Art in Zylinderkoordinaten auf. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für Radial- und Winkelkoordinaten der ersten Masse, r_1 und φ_1, ab,

$$(m_1 + m_2)\ddot{r}_1 - m_1 r_1 \dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0 \quad (1)$$
$$m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 + 2 m_1 r_1 \dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 = 0 \quad (2)$$

Hinweis: In Zylinderkoordinaten gilt

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \left(\ddot{r}_k - r_k \dot{\varphi}_k^2\right) \hat{\mathbf{e}}_{r_k} + (2\dot{r}_k \dot{\varphi}_k + r_k \ddot{\varphi}_k)\hat{\mathbf{e}}_{\varphi_k} + \ddot{z}_k \hat{\mathbf{e}}_{z_k}$$

b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls von m_1, $l_1 = m_r r_1^2 \dot{\varphi}$, gleich einer Konstanten ist, die wir im Folgenden l nennen. (*Hinweis: beginnen Sie mit Gleichung (2)*)

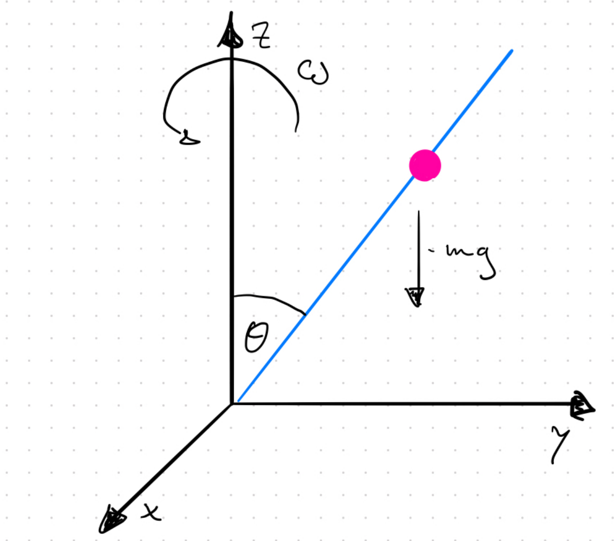
c) Schreiben Sie $\dot{\varphi}_1$ in Form von l und ersetzen Sie dann diesen Ausdruck in der Bewegungsgleichung für r_1. Diskutieren Sie das Verhalten von r_1 für verschiedene Werte des Drehimpulses. Zeigen Sie, dass es für einen festen Drehimpuls l einen kritischen Radius r_1^* gibt, in dem $\ddot{r}_1$ verschwindet.

d) Zeigen Sie, dass eine Trajektorie für die der Radius $r_1(t) = r_1^* = \text{const.}$ ist, die Bewegungsgleichung erfüllt. Erklären Sie, welche Kräfte ausgeglichen werden müssen, um zu dieser Gleichgewichtssituation zu führen.

e) Nun bewegt sich die Masse auf dieser Gleichgewichtsbahn mit konstantem Radius r_1^* und wird durch eine kleine Störung $\epsilon(t)$ in radialer Richtung abgelenkt. Wir schreiben $r(t) = r_1^* + \epsilon(t)$. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für r_1 in Bezug auf $\epsilon(t)$ neu her. Vernachlässigen Sie alle Terme zweiter oder höherer Ordnung in ϵ und zeigen Sie, dass die resultierende Trajektorie stabil ist und dass $r_1(t)$ sinusförmig um r_1^* oszilliert. Was ist die Frequenz dieser Oszillation?

2. **Perle auf Stab** [$2 + 2 + 2 = 6$ Punkte]

Noch einmal wollen wir die Perle, mit Masse m auf dem Draht lösen. Zur Erinnerung: Der Draht dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel θ um die z-Achse. Die Perle ist außerdem der Gravitationskraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt, die entlang der Rotationsachse wirkt.

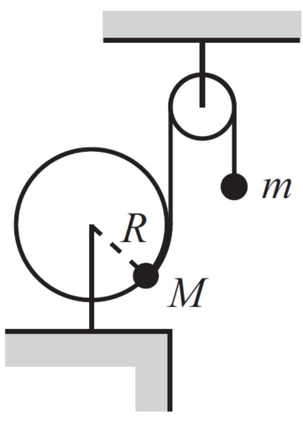


Dieses mal wollen wir die Lagrangegleichungen der zweiten Art verwenden, sodass wir uns gar nicht erst um die Zwangskräfte kümmern müssen.

a) Bestimmen Sie die Freiheitsgrade des Problems und wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten.
b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.
c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichung her.

3. **Reifen und Rolle** [$2 + 4 + 1 + 2 = 9$ Punkte]

Eine Punktmasse M ist an einem masselosen Reifen mit Radius R angebracht. Der Reifen kann frei um sein fixiertes Zentrum rotieren. An M ist ein masseloses Seil befestigt, das zunächst entlang des Reifens verläuft und dann senkrecht nach oben über eine masselose Rolle führt. Reifen und Rolle liegen in derselben Ebene. Am anderen Ende des Seils hängt eine Punktemasse m.



Nehmen Sie an, dass m sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegen kann, dass $M > m$ und, dass das Seil lang genug ist, damit m niemals über die Rolle gezogen wird.

a) Ein System mit zwei freien Punktmassen im dreidimensionalen Raum besitzt 6 Freiheitsgrade. Erläutern Sie welche Teile der Angabe die Freiheitgsrade des oben beschriebenen Systems einschränken und erklären Sie warum das System nur einen Freiheitsgrad hat.

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System auf. Nutzen Sie hierbei, dass nur eine generalisierte Koordinate benötigt wird, um das System zu beschreiben.

   Hinweis: Eine geeignete generalisierte Koordinate ist der Rotationswinkel des Reifens.

c) Warum muss man die Länge des Seils nicht kennen, um Aufgabe b) zu lösen?

d) Stellen Sie die Lagrange-Gleichung 2. Art für dieses System auf. (Die Bewegungsgleichung muss nicht gelöst werden.)