Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2021

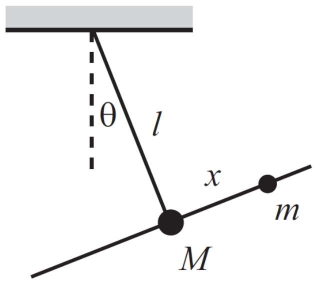
Übungsblatt 8
Mehr zu Lagrange

Abgabe bis: 11.06.2021 um 12:00 Uhr

---

1. **Kippende Ebene** [$4 + 2 = 6$ Punkte]

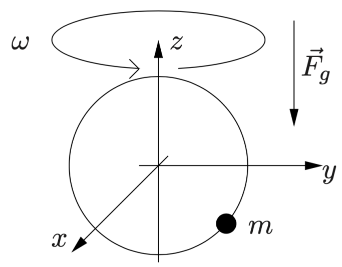
   Eine masselose Stange mit Länge l ist an einem Ende an einer Aufhängung befestigt. Am anderen Ende ist eine zweite sehr lange masselose Stange befestigt, die im rechten Winkel zur ersten Stange montiert ist. Eine Masse M ist am Verbindungspunkt der beiden Stangen fixiert. Eine zweite Masse m kann sich entlang der langen Stange frei bewegen. Das ganze System kann frei um die Achse der Aufhängung rotieren.



   a) Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion in diesen Koordinaten auf.
   b) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für dieses System. (Die Gleichungen müssen hier nicht gelöst werden.)

2. **Perle auf einem rotierenden Reif** [$4 + 2 + 6 = 12$ Punkte]

   Wir betrachten eine Glasperle der Masse m, deren als reibungsfrei angenommene Bewegung entlang eines masselosen Drahtreifs mit Radius R eingeschränkt ist. Der Drahtreif befindet sich in einer vertikalen Ebene und rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine vertikale Symmetrieachse, die z-Achse. Die Gravitationskraft sei die einzige Kraft, die auf die Glasperle wirkt.



   a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in geeigneten generalisierten Koordinaten auf und leiten Sie davon die Bewegungsgleichungen für die Perle ab.
   b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslagen der Perle. Dies sind die Positionen der Perle auf dem Reif, an denen keine Kraft auf die Perle entlang des Reifs wirkt.

c) Identifizieren Sie nun die stabilen und instabilen Gleichgewichtslagen. Parametrisieren Sie dazu kleine Auslenkungen der Perle um ihre Gleichgewichtslage und bestimmen Sie, in welchen Lagen stabile Oszillationen der Bewegung um die Gleichgewichtslage auftreten.

3. **Eichtransformationen der Lagrangefunktion** [$3 + 4 + 3 = 10$ Punkte]

In dieser Übung untersuchen wir Transformationen der Lagrangefunktion, welche die entsprechende physikalische Bewegung nicht beeinflussen. Solche Transformationen nennen wir Eichtransformationen.

a) Betrachten Sie ein 1-Dimensionales Teilchen der Masse m mit Ortskoordinate x. Die Bewegung des Teilchens sei mit der folgenden Lagrangefunktion beschrieben,

$$L_1(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - t\dot{x}F(x) \ , \tag{1}$$

wobei $F(x)$ ein Feld mit Einheiten einer Kraft ist. Zeigen Sie, dass die entsprechende Bewegungsgleichung tatsächlich dieselbe ist, wie die für ein Teilchen, das sich in einem Kraftfeld $F(x)$ befindet.

b) Eine allgemeine Lagrangefunktion $L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ eines Systems hänge von den verallgemeinerten Koordinaten q_i, den entsprechenden Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, N$, und der Zeit ab. Zeigen Sie durch Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichungen, dass die Lagrangefunktion

$$L'(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) = L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t) + \frac{d}{dt}f(q_i, t) \tag{2}$$

zu den gleichen Bewegungsgleichungen wie $L(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ führt. (Man benütze hier die Schreibweise $(d/dt)f(q_i, t) = (\partial f/\partial t) + \sum_i (\partial f/\partial q_i)\, \dot{q}_i$.)

c) Betrachten Sie wie in a) ein 1-dimensionales Teilchen der Masse m mit Ortskoordinate x. Das Feld $F(x) = -(\partial V/\partial x)$ sei ein konservatives Kraftfeld mit Potenzial $V(x)$. Geben Sie die entsprechende Lagrangefunktion in der Form $L_2(x, \dot{x}, t) = T(\dot{x}) - V(x)$ an. Zeigen Sie, dass L_1 [in Aufgabe a) definiert] und L_2 sich durch ein Term der Form $(d/dt)f(x, t)$ unterscheiden, wie in (2). (Die Lagrangefunktionen L_1 und L_2 sind dann äquivalent bis auf eine Eichtransformation.)

Hinweis. Es gilt $dV/dt = \dot{x}(\partial V/\partial x)$, denn V nur implizit durch $x(t)$ von der Zeit abhängt.