

Übungsblatt 9
Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Abgabe bis: 18.06.2021 um 12:00 Uhr

1. **Noether-Theorem Aufwärmübung** [1 + 2 + 2 + 3 = 8 Punkte] Wir betrachten ein System mit einem Teilchen in einem Potential. Die Lagrange-Funktion lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - a(y^2 + z^2)$$

- a) Zeigen Sie, dass \mathcal{L} invariant unter der folgenden Transformation ist:

$$\begin{aligned}x(t, \alpha) &= x(t) + \alpha \\y(t, \alpha) &= y(t) \\z(t, \alpha) &= z(t)\end{aligned}\tag{1}$$

- b) Nutzen Sie das Noether-Theorem um zu zeigen, welche Erhaltungsgröße aus der Invarianz unter der Transformation (1) folgt.

- c) Zeigen Sie, dass \mathcal{L} auch unter der folgenden Transformation invariant ist:

$$\begin{aligned}x(t, \alpha) &= x(t) \\y(t, \alpha) &= y(t) \cos \alpha - z(t) \sin \alpha \\z(t, \alpha) &= y(t) \sin \alpha + z(t) \cos \alpha\end{aligned}\tag{2}$$

- d) Nutzen Sie das Noether-Theorem um zu zeigen, welche Erhaltungsgröße aus der Invarianz unter der Transformation (2) folgt.

2. **Erhaltungsgrößen im Zentralpotential** [2+2+4+4=12 Punkte]

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Teilchen der Masse m im Zentralpotential $U(\mathbf{r}) = -\frac{k}{|\mathbf{r}|}$, $k > 0$.

- a) Betrachten Sie zunächst eine infinitesimale Drehung um eine Achse \mathbf{n} :

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}^* = \mathbf{r} + (\mathbf{n} \times \mathbf{r})\epsilon,\tag{3}$$

und zeigen Sie für eine allgemeine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \rightarrow \mathcal{L}^* = \mathcal{L}(\mathbf{r}^*(\epsilon), \dot{\mathbf{r}}^*(\epsilon))$ den folgenden Zusammenhang

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}).\tag{4}$$

- b) Zeigen Sie mit (4), dass im Zentralpotential der Drehimpuls erhalten ist.
c) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion des Teilchens im Zentralpotential unter den drei infinitesimalen Koordinatentransformationen ($j = 1, 2, 3$)

$$x_i \rightarrow x_i^*(\epsilon, j) = x_i + \epsilon \left[\dot{x}_i x_j - \frac{1}{2} x_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k x_k \dot{x}_k \right]\tag{5}$$

für die kartesischen Komponenten des Ortsvektors ($i = 1, 2, 3$) bis auf eine totale Zeitableitung invariant ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Bewegungsgleichungen.

- d) Zeigen Sie, dass die über das Noethertheorem mit den Koordinatentransformationen verknüpften Erhaltungsgrößen die Komponenten des Vektors

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L} - k \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \quad (6)$$

sind, wobei \mathbf{L} den Drehimpuls des Teilchens bezeichnet.

3. Legendre Transformation [2 + 1 + 2 + 2 + 2 = 9 Punkte]

Die Hamiltonsche Mechanik und die Lagrange Mechanik ergeben sich aus einander, indem die Freiheitsgrade des Systems entweder mit (q, \dot{q}) oder (q, p) parametrisiert werden. Dadurch wird die Rolle der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ durch die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ besetzt und umgekehrt.

Die Dualitätsbeziehung zwischen \dot{q} und p und damit L und H beruht auf einem allgemeineren mathematischen Prinzip der Legendre-Dualität (oder noch allgemeiner der Fenchel-Dualität). Diese Dualität ist eines der wichtigsten Konzepte der konvexen Analysis und Theorie der konvexen Optimierung. Neben der Mechanik spielt die Legendre-Dualität auch im Übergang zwischen unterschiedlichen Beschreibungen der Thermodynamik eine wichtige Rolle. Hier wollen wir uns einmal genauer anschauen, was dahinter steckt.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man als *konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt, dass $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$. Gilt diese Bedingung als strikte Ungleichung für $\lambda \in (0, 1)$ und $x_1 \neq x_2$ so nennt man f *streng konvex*.

- a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ eine konvexe Funktion ist.
(Zusatzaufgabe: Für multidimensionale quadratische Funktionen gilt allgemeiner: Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einer symmetrischen, positiv-definiten Matrix ist konvex. Zeigen Sie auch dies.)

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die *Legendre-transformierte* oder *konvex-konjugierte* Funktion

$$f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \quad x^* \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x \cdot x^* - f(x)).$$

- b) Zeigen Sie, dass f^* eine konvexe Funktion ist.
c) Sei f streng konvex und stetig differenzierbar. Argumentieren Sie, dass dann

$$f^*(x^*) = x^* \cdot \tilde{x} - F(\tilde{x}),$$

wobei \tilde{x} durch die Bedingung $x^* = \nabla f(\tilde{x})$ eindeutig festgelegt ist.

- d) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Legendre-transformierten Funktion f^* einer streng konvexen, differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. *Hinweis: Betrachten Sie dazu die Tangenten an dem Graphen der Funktion.*
e) Zeigen Sie, dass die Legendre-Transformation für stetig differenzierbare, strikt konvexe Funktionen eine Involution ist, d.h. es gilt $(f^*)^*(x) = f(x)$.