Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2021

Übungsblatt 10
Hamiltonsches Prinzip und Hamilton-Formalismus

Abgabe bis: 25.06.2021 um 12:00 Uhr

---

1. **Hamilton Prinzip** [2 + 2 + 3 = 7]
   In dieser Aufgabe wollen wir mit Hilfe des Hamilton Prinzips und der Variationsrechnung zeigen, dass der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) im $\mathbb{R}^2$ eine gerade Linie ist. Dazu schreiben wir einen beliebigen Weg als eine parametrisierte Kurve $\mathbf{r}(t)$, wobei $t \in [0, 1]$ sodass $\mathbf{r}(0) = (x_1, y_1)$ und $\mathbf{r}(1) = (x_2, y_2)$.
   a) Finden Sie eine Formel für die Länge $L[\mathbf{r}]$ eines Weges $\mathbf{r}$.
   b) Berechnen Sie Variation δL der Länge indem Sie L für einen Weg $\mathbf{r}$ und einen Weg $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ betrachten und beide voneinander subtrahieren.
   c) Formen Sie das Integral um, sodass $\delta\mathbf{r}$ im Integranden steht und argumentieren Sie, warum daraus nun folgt, dass der Weg $\mathbf{r}(t)$ eine Gerade sein muss.

   Sicherlich war dieses Ergebnis keine Überraschung für Sie, allerdings demonstriert es wie wir prinzipiell kürzeste Wege auf beliebigen Mannigfaltigkeiten ausrechnen können (etwa auf einer Kugel oder einem Torus).

2. **Optimale Rutsche** [$4 + 5 + 3 + 2 = 14$ Punkte]

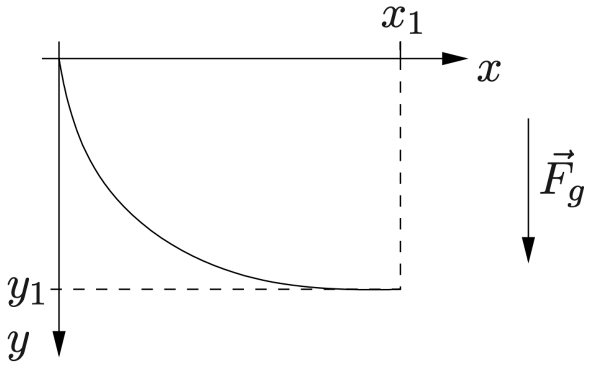


Abbildung 1: Rutsche zwischen den Punkten P_0, P_1 im Schwerefeld. Beachten Sie die Orientierung der Koordinatenachsen.

   Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer Rutsche im Schwerefeld der Erde vom Punkt $P_0 = (0, 0)$ zu einem Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$. Am Startpunkt P_0 sei das Teilchen in Ruhe. Die Form der Rutsche sei durch die Funktion $y(x)$ gegeben

   a) Bestimmen Sie das Funktional $T[y, y'] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', y, x)dx$ für die Laufzeit von P_0 nach P_1 in Abhängigkeit von $y(x)$. Nutzen Sie dazu die Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$. *Hinweis: Der Zusammenhang zwischen v und y kann über Energieerhaltung bestimmt werden.*
   b) Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx} f(y, y') = 0 \;\text{ für }\; f(y, y') = \frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}}$$

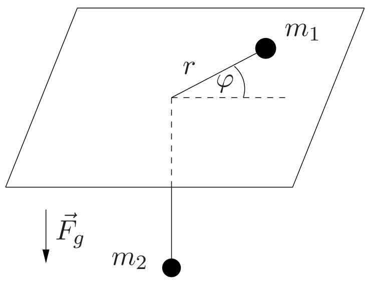
   mit $y' = \frac{dy}{dx}$. Können Sie schon anhand des zu minimierenden Funktionals ableiten, dass $f(y, y')$ für die optimale Rutsche erhalten sein muss?

c) Zeigen Sie, dass die optimale Bahnkurve über Funktionen $x = x(\theta) = R(\theta - \sin(\theta))$, $y = y(\theta) = R(1 - \cos(\theta))$ mit $0 \leq \theta \leq 2\pi$ parametrisiert werden kann. Bestimmen sie R für $y_1 = 0$. Was ist an dieser Kurve besonders?

d) Skizzieren Sie die optimale Bahnkurve.

3. **Verbundene Massen mit planarer Zwangsbedingung** $[2+4+2+2 = 10$ Punkte$]$

Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch einen Faden der Länge L verbunden, der durch ein Loch in einer horizontalen Fläche (der $(x-y)$-Ebene) verläuft. Die Masse m_1 gleitet reibungslos auf der horizontalen Fläche, während m_2 senkrecht nach unten hängt und sich nur in Richtung der Gravitationskraft bewegt.



Dieses System kann durch zwei verallgemeinerte Koordinaten beschrieben werden, die als Radial- und Winkelkoordinaten der ersten Masse gewählt werden können. Wenn wir $r := r_1$ und $\phi := \phi_1$ definieren und weiter annehmen, dass die beiden Massen gleich $(m_1 = m_2 = m)$ sind, ist die Lagrangefunktion dieses Systems

$$L = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - mgr\,.$$

a) Geben Sie die zugehörige Hamiltonfunktion an.

b) Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen? Benutzen Sie diese, um die Bewegungsgleichungen für die kanonischen Koordinaten und Impulse dieses Systems aufzuschreiben.

c) Ist die Hamiltonfunktion eine Erhaltungsgröße? Ist die Energie eine Erhaltungsgröße? Begründen Sie Ihre Antworten!

d) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass der Drehimpuls der ersten Masse $p_\phi = mr^2\dot{\varphi}$ eine Erhaltungsgröße ist.