Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2021

Übungsblatt 11
Kanonische Transformationen, Satz von Liouville und deterministisches Chaos

Abgabe bis: 02.07.2021 um 12:00 Uhr

---

1. **Kanonische Transformationen und Satz von Liouville** [$2 + 3 + 4 = 9$ Punkte]

   Betrachten Sie die Hamiltonfunktion eines harmonischen Oszillators:
   $$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2. \qquad (1)$$

   a) Definieren Sie neue Koordinaten Q und P:
   $$Q = q\sqrt{\omega} \quad , \quad P = p/\sqrt{\omega} \qquad (2)$$
   und zeigen Sie, dass dies eine kanonische Transformation ist.

   b) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion als Funktion von Q und P um. Stellen Sie die hamiltonschen Bewegungsgleichunen auf und lösen Sie das Gleichungssystem für allgemeine Anfangsbedingungen $Q(0) = Q_0$ und $P(0) = P_0$.

   c) Betrachten Sie ein Rechteck $ABCD$ im Phasenraum mit Eckpunkten $(Q_A, P_A) = (1, 0)$, $(Q_B, P_B) = (2, 0)$, $(Q_C, P_C) = (2, 1)$und $(Q_D, P_D) = (1, 1)$. Finden Sie die Abbildung des Rechtecks zu einem späteren Zeitpunkt t. *Hinweis: Zeigen Sie, dass in den neuen Koordinaten, die Zeitentwicklung im Phasenraum einer Rotation um den Ursprung entspricht.* Zeigen Sie, dass die Fläche des Rechtecks durch die Zeitentwicklung nicht verändert wird und erkären Sie, warum das aufgrund des Satzes von Liouville auch im Allgemeinen zu erwarten ist. Wäre das immer noch der Fall, wenn ω in (1) eine zeitabhängige Funktion wäre?

2. **Pendel** [$2 + 3 + 3 + 4 = 12$ Punkte]

   Betrachten Sie ein Pendel mit einer Masse m, die am Ende einer masselosen Stange mit konstanter Länge l angebracht ist und sich im Gravitationsfeld mit Gravitationsbeschleunigung g bewegt. Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch:
   $$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \ , \qquad (3)$$
   wobei θ der Winkel der Stange zur vertikalen Achse ist.

   a) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion und die hamiltonschen Bewegungsgleichung. Was ist der zur Koordinate θ gehörende kanonische Impuls p_θ?

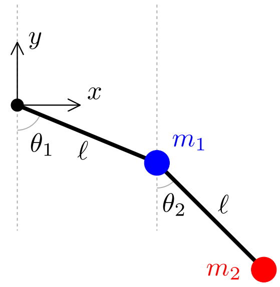
   b) Schreiben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in Matrixform
   $$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \qquad (4)$$
   wobei $\boldsymbol{X} = (\theta, p_\theta)^T$ und $\boldsymbol{F}$ eine vektorwertige Funktion von θ, p_θ ist.

   c) Zeigen Sie, dass $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$. Das bedeutet, dass der Fluss im Phasenraum, der durch die Zeitentwicklung definiert ist, sich wie eine inkompressible Flüssigkeit verhält, d.h. die Fläche ist erhalten (Satz von Liouville).

   d) Finden Sie die Gleichgewichtspunkte und entwickeln sie $\boldsymbol{F}$ bis zur ersten Ordnung um jeden dieser Punkte. Schreiben Sie die so linearisierten Hamiltonschen Bewegungsgleichungen wiederum in Matrixform:
   $$\dot{\boldsymbol{X}} = A \cdot \boldsymbol{X} \qquad (5)$$
   Entscheiden Sie für jeden der Gleichgewichtspunkte, ob er stabil oder instabil ist.

3. **Doppel-Pendel** [3 + 3(+6) = 6(12) Punkte]

Betrachten Sie ein Pendel mit Masse m am Ende einer masselosen Stange mit Länge ℓ und ein zweites identisches Pendel, welches am Ende des ersten angebracht ist. Das erste Pendel ist am Ursprung $(0, 0)$ aufgehängt und beide Pendel bewegen sich nur in einer zweidimensionalen Ebene.



a) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion gegeben ist durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} - V \;;$$

$$A = m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) & 1 \end{bmatrix} \;; \qquad V = -mg\ell \left(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) \,.$$

b) Zeigen Sie, dass die verallgemeinerten Impulse durch

$$\begin{bmatrix} p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

gegeben sind und zeigen Sie, dass

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_{\theta_1} & p_{\theta_2} \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} p_{\theta_1} \\ p_{\theta_2} \end{bmatrix} + V \,. \tag{7}$$

Die Ableitungen von H ergeben sich zu (mit p_i kurz für p_{θ_i} und mit $x = \theta_1 - \theta_2$): *(Zusatzaufgabe: Zeigen Sie diese Formeln.)*

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}} = \frac{p_1 - p_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m\ell^2(2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \;; \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}} = \frac{2p_2 - p_1\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m\ell^2(2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2))} \;;$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = 2mg\ell\sin(\theta_1) + g(x, p_1, p_2) \;; \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta_2} = mg\ell\sin(\theta_2) - g(x, p_1, p_2) \;;$$

$$g(x, p_1, p_2) = \frac{1}{m\ell^2(2 - \cos^2(x))} \left[p_1 p_2 \sin(x) - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2 - \cos^2(x)} \left(p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(x)\right) \right] \,.$$

c) *BONUS-Aufgabe:* Verwenden Sie einen numerischen Solver Ihrer Wahl um die Bewegungsgleichungen für folgende Anfangsbedingungen zu lösen: $\theta_1(0) = 3\pi/8$, $\theta_2(0) = 3\pi/4$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = 0$. Verändern Sie die Anfangsbedingungen nun leicht. Verhält sich das System chaotisch? Falls ja, versuchen Sie den Lyapunov-Exponenten für diese Anfangsbedingung abzuschätzen.

Hinweis. Sie können das angehängte Python/Jupyter-Notebook als Startpunkt benutzen.