Analytische Mechanik (20113401)

Vorlesender: Jens Eisert.

Kapitel 8: Liouvillesches Theorem und deterministisches Chaos

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 8

Liouvillesches Theorem und deterministisches Chaos

8.1 Vorbemerkungen

Nun haben wir schon einen recht tiefen Einblick in die analytische Mechanik erhalten. Wir haben die Newtonsche Mechanik aus einem neuen Blickwinkel kennengelernt und mit ihrer Hilfe die Keplerschen Gesetze hergeleitet. Wir haben den Lagrangeschen Formalismus eingeführt und nicht nur gesehen, wie sich Zwangsbedingungen respektieren lassen: Wir haben sogar ein geometrisches Bild entwickelt. Und zuletzt haben wir die Hamiltonsche Mechanik angesehen. Von Letzterer ausgehend wollen wir uns in diesem Kapitel vorknöpfen, was wir aus ihr lernen können. Wir werden kanonische Transformationen kurz ansehen, dynamische Systeme kennenlernen, um dann deren Verhalten eingehend zu studieren. Die Überraschung besteht darin, dass die Mechanik zwar eine deterministische Theorie ist – dies aber für praktische Zwecke anders sein kann, wie wir im deterministischen Chaos sehen werden.

8.2 Dynamische Systeme

8.2.1 Kanonische Transformationen

Zunächst einmal stellt sich die Frage, wie wir eigentlich den Hamiltonschen Formalismus zur Lösung von Problemen nutzen können. Zunächst einmal ist der Ansatz, die Hamiltonfunktion zu identifizieren. Ein System zu kennen meint, die Hamiltonfunktion zu kennen. Dann ergeben sich die Bewegungsgleichungen aus den Hamiltonschen Gleichungen. Es kann hierbei hilfreich sein, in passende Koordinaten zu gehen, wir werden ein solches Vorgehen bei gekoppelten Systemen genauer ansehen. Wir können dabei also ausnutzen, dass andere Koordinaten "passendere" Koordinaten sein können zur Beschreibung eines Problems. Wir können tatsächlich von einem Satz von Koordinaten und Impulsen $(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)$ zu einem neuen legitimen Koordinaten-satz übergehen, und dabei die Hamiltonfunktion passend umskalieren. Solche legitimen Transformationen heißen *kanonische Transformationen*.

Kanonische Transformationen: Eine lineare Transformation,

$$(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, H) \mapsto (q_1', \ldots, q_f', p_1', \ldots, p_f', H') \tag{8.1}$$

die die Poissonklammern erhält, heißt kanonische Transformation.

Dadurch sind die Bewegungsgleichungen ja auch erhalten. Ein Beispiel ist der harmonische Oszillator mit normiertem Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \tag{8.2}$$

Wenn wir

$$(q, p, H) \mapsto (p, q, H) \tag{8.3}$$

abbilden, also p und q vertauschen, sind die Poissonklammern erhalten. Solche kanonischen Transformationen ergeben auch in der Quantenmechanik Sinn.

8.2.2 Definition eines dynamischen Systems

Ein *dynamisches System* ist eines, bei dem zeitliche Ableitungen von Koordinaten von den anderen Koordinaten in einer einfachen funktionalen Weise abhängen. Wir sind zusächst agnostisch und reden in der einen oder anderen Art von m Freiheitsgraden $(x_1(t), \ldots, x_m(t))$, absichtlich von der bisherigen Notation von kartesischen Koordinaten unterschieden, weil wir uns hier nicht festlegen wollen.

Dynamisches System: Systeme von Differentialgleichungen mit

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \ldots, x_m) \tag{8.4}$$

für Funktionen $f_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, m$, heißen dynamische Systeme.

Solche Systeme sind ubiquitär in der Beschreibung von Physik komplexer Dynamik, aber auch in Populationsdynamik, in volkswirtschaflichen Zusammenhängen, und – nicht ganz unpassend in diesen Tagen – in der Virologie. Wir müssen hier die kartesischen Koordinaten auch nicht wörtlich nehmen. n kann auch eine andere Rolle einnehmen. In der Tat sind die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ein dynamisches System, für das $m = 2f$ ist. Denn dann sind die verallgemeinerten Koordinaten

$$(x_1, \ldots, x_f) = (q_1, \ldots, q_f) \tag{8.5}$$

und

$$(x_{1+f}, \ldots, x_{2f}) = (p_1, \ldots, p_f). \tag{8.6}$$

Die Funktionen können ebenso identifiziert werden: Es sind

$$f_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{8.7}$$

und

$$f_{j+f} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{8.8}$$

für $j = 1, \ldots, f$. Hamiltonsche Systeme, und damit Systeme der Mechanik, sind dynamische Systeme.

8.3 Eigenschaften dynamischer Systeme

8.3.1 Gleichgewichtszustände

Wir wollen im folgenden dynamische Systeme eingehender untersuchen. Welche sind nun Gleichgewichtszustände? Dies sind sicher solche Punkte $(x_1, \ldots, x_m)$, für die

$$f_j(x_1, \ldots, x_m) = 0 \tag{8.9}$$

gilt, denn für jene gibt es keine Zeitabhängigkeit. Punkte, für die Gleichung (8.9) gilt, heissen *kritische Punkte*. Wenn wir ein Hamiltonsches System mit n Freiheitsgraden im $\mathbb{R}^3$ betrachten, mit Hamiltonfunktion

$$H(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_j} + U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n), \tag{8.10}$$

wenn also $m = 3n$ ist, sind die kritischen Punkte also gerade die Gleichgewichtspunkte. Nun macht es tatsächlich einen großen Unterschied, von welcher Natur diese Gleichgewichtspunkte sind.

Wenn man s unabhängige Größen durch stetig differenzierbare Funktionen

$$g_1, \ldots, g_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{8.11}$$

findet, die zeitlich erhalten sind, dann bleiben Bahnkurven immer auf $n-s$-dimensionale Mannigfaltigkeiten des Phasenraumes beschränkt, die durch die Anfangsbedingungen gegeben sind. Um ein dynamisches System diskutieren zu können, ist also die Kenntnis der der erhaltenen Größen wichtig. Ein *integrables System* ist durch die Existenz von f erhaltenen Funktionen $g_1, \ldots, g_f$ charakterisiert, für die

$$\{g_j, g_k\} = 0 \tag{8.12}$$

für $j, k = 1, \ldots, f$ gilt. Solche Systeme sind tatsächlich "integrierbar", um die Dynamik zu lösen. In der Quantenmechanik gibt es übrigens auch integrable Systeme, die so viele erhaltene Größen aufweisen, wie es Freiheitsgrade gibt. Solche Systeme sind aber nicht mehr zwingend direkt lösbar, und es gibt auch in der Tat eine Reihe von verschiedenen Begrifflichkeiten von Integrabilität, die nicht alle das gleiche meinen.

8.3.2 Verhalten dynamischer Systeme für große Zeiten

Für große Zeiten können dynamische Systeme eine Vielzahl von Phänomene auftreten, die interessant sind. Wir betrachten hier Hamiltonsche dynamische Systeme, aber nicht nur, wir erlauben auch Dämpfung, was im Rahmen eines dynamischen Systems vorstellbar ist, aber nicht in einem abgeschlossenen Hamiltonschen System.

Ergodisches Verhalten: Ein ergodisches Hamiltonsches System kommt jedem Punkt seiner Teilmannigfaltigkeit im Phasenraum P beliebig nahe.

Dies ist spannend: Man kann sich eine beliebige Konfiguration im Phasenraum vorstellen

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = (Q_1, \ldots, Q_f, P_1, \ldots, P_f) \in P, \tag{8.13}$$

und ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgeben, dann es wird eine Zeit t geben, so dass für

$$(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = (q_1(t), \ldots, q_f(t), p_1(t), \ldots, p_f(t)) \tag{8.14}$$

das folgende gilt

$$\|(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) - (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))\| \leq \varepsilon. \tag{8.15}$$

Ein abgeschlossenes Hamiltonsches System hat immer die Erhaltungsgröße der Energie, also ist die Dynamik auf die Energiefläche $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = E$ eingeschränkt. Ein solches System ist nicht ergodisch auf der Mannigfaltigkeit der Energiefläche, wenn weitere Erhaltungsgrößen existieren: Denn sie werden das System davon abhalten, beliebig nache an jeden Phasenraumpunkt zu kommen. Ob ein System wirklich ergodisch ist, ist in aller Regel schwierig zu zeigen, denn man muss ja sicherstellen, dass man keine versteckten Erhaltunggrößen übersieht. Spannend ist, dass diese Definition nicht sagt, *wann* das der Fall sein wird. Es könnte sehr lange dauern, im Prinzip überexponentiell lange in der Systemgröße, bis der Punkt erreicht wird. Es gibt auch kinetisch restringierte Probleme, glasartige Probleme, die zwar zu einem bestimmten Punkt im Phasenraum laufen, dies aber auf sehr, sehr langen Zeiten tun. Glas etwa ist ja eine Flüßigkeit, aber dessen Dynamik läuft zweifelsohne auf langen Zeitskalen ab. Wichtig sind auch periodische Eigenschaften.

- *Periodisches Verhalten* heißt, dass das System in Zyklen ständig die gleiche Bewegung wiederholt.
- *Quasiperiodisches Verhalten* ist etwas allgemeiner, es beschreibt die Überlagerung von periodischer Bewegung mit inkommensurablen Perioden.

8.3.3 Attraktoren

Attraktoren sind besonders interessante Punkte. Dies sind Punkte, denen sich Bahnkurven für große Zeiten immer weiter nähern. Es kann einen oder mehr als einen Attraktor geben, wobei es von den Anfangsbedingungen abhängt, welcher Attraktor erreicht wird – immerhin ist die Mechanik eine deterministische Theorie. Die Einzugsbereiche der Attraktoren können dabei überlappen. Das wohl einfachste System mit einem Attraktor ist das *gedämpfte Pendel*, mit den Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}(t) = p(t), \tag{8.16}$$

$$\dot{p}(t) + \alpha p(t) + k q(t) = 0 \tag{8.17}$$

mit $\alpha, k > 0$. Der offensichtliche Attraktor ist

$$(0,0) \in P = \mathbb{R}^2. \tag{8.18}$$

Das Pendel wird bald ausklingen und einfach im Ursprung des Phasenraums runterhängen. Dieses dynamische System ist übrigens nicht hamiltonsch, weil es Reibung umfasst. Es gibt eine Reihe von Attraktoren, nicht alle davon sind klassifiziert. Für $P = \mathbb{R}^2$ ist das allerdings schon der Fall.

- *Asymptotisch stabile Grenzpunkte oder Attraktoren:* Die Bahnkurven streben für große Zeiten t gegen einen Punkt im Phasenraum P.
- *Grenzzyklen*: Die Bahnkurven streben für große Zeiten t gegen eine kompakte eindimensionale Teilmenge. Die Dynamik wird dabei zu beliebig genauer Approximation periodisch mit einer festen Periode.

Für höherdimensionale Systeme sind auch kompliziertere Attraktoren bekannt. Spannend ist etwa das Phänomen der *Synchronisation*, bei dem man mehrere Systeme gibt, die asymptotisch stabile Grenzzyklen aufweisen. Allerdings sind diese schwach gekoppelt, so dass sie dazu neigen, in *Phase* zu kommen. Schwach nichtlinear gekoppelte Pendel haben etwa diese Eigenschaft. Dieses spannende Phänomen wurde schon im Barock beobachtet. Hierfür braucht man

- asymptotisch stabile Grenzzyklen. Dies meint, dass kleine Auslenkungen wieder zurück zum Grenzzyklus führen.
- Eine schwache, nichtlineare Kopplung. Die Hamiltonfunktion darf also kein quadratisches Polynom in Orten und Impulsen sein.

8.3.4 Liouvillesches Theorem

Das Liouvillesche Theorem impliziert eine einfache wie auch gleichermaßen erstaunliche Aussage. Sie impliziert eine Aussage über die Volumenverzerrung dynamischer Systeme. Die Aussage ist wie folgt: Im Phasenraum P betrachten wir ein Gebiet $G(t) \subset P \in \mathbb{R}^{2f}$. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}^{2f}. \tag{8.19}$$

Zum Zeitpunkt $t + \tau$ für $\tau > 0$ wird jeder Punkt $\mathbf{x}(t) \in G(t)$ aus diesem Gebiet in einen anderen Punkt

$$\mathbf{x}(t+\tau) = g(\tau, \mathbf{x}(t)) \tag{8.20}$$

übergegangen sein, für eine passende Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2f} \to \mathbb{R}^{2f}$, die die Zeitentwicklung des dynamischen Systems reflektiert. Aus dem Gebiet $G(t)$ wird so $G(t+\tau)$ geworden sein,

$$G(t) \mapsto G(t+\tau). \tag{8.21}$$

Man kann sich so die Entwicklung als eine stroboskopische Deformation von Gebieten im Phasenraum vorstellen. Wir wollen nun sehen, wie sich die Volumina (oder Flächen, hier sind also Hypervolumina gemeint) entwickeln und die von $G(t)$ und $G(t+\tau)$ miteinander vergleichen. Es sind

$$V(t) = \int_{G(t)} d^{2f}x, \tag{8.22}$$

$$V(t+\tau) = \int_{G(t+\tau)} d^{2f}x, \tag{8.23}$$

einfach Indikatorfunktionen verwendend in der Integration. Aus der Transformationsformel für Gebietsintegrale erhalten wir

$$V(t+\tau) = \int_{G(t)} d^{2f}x \det(M(t,\tau)), \tag{8.24}$$

wobei die Matrix M die Komponenten hat

$$M(t,\tau)_{j,k} = \frac{\partial g_j(\tau, \mathbf{x}(t))}{\partial x_j(t)}. \tag{8.25}$$

Zentral für den Vergleich der Volumina ist also die Determinante $\det(M(t,\tau))$. Wie ändert sich nun dieses Volumen? Unter allgemeiner Dynamik kann alles mögliche passieren. Und unter Hamiltonscher Dynamik? Da finden wir das folgende spannende und bemerkenswerte Ergebnis.

Liouvillesches Theorem: Das Volumen eines beliebigen Gebietes des Phasenraumes bleibt unter Hamiltonscher Dynamik konstant.

Es ändert sich also gar nicht. Über die Form sagt es allerdings nichts aus. Ein anfänglich einfach geformtes Gebiet kann Arme entwickeln und "zerfasern" in der zeitlichen Entwicklung. In der Tat sind solche Einsichten wichtig, wenn man den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und den Zeitpfeil mit Hamiltonscher Dynamik in Einklang bringen will. Dennoch: Das Volumen bleibt exakt erhalten. Wie ist das möglich? Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) &= \frac{d}{d\tau}V(t+\tau)|_{\tau=0} \\ &= \int_{G(t)} d^{2f}x \frac{\partial \det(M(t,\tau))}{\partial \tau}|_{\tau=0}. \end{aligned}$$

Um zu sehen, wie sich der Ausdruck entwickelt, reicht es, Terme bis zur ersten Ordnung anzusehen. Wegen

$$\dot{x}_j(t) = f_j(\mathbf{x}(t)) \tag{8.26}$$

ist nun zunächst für ein beliebiges und nicht unbedingt Hamiltonsches dynamisches System

$$\begin{aligned} x_j(t+\tau) &= g_j(\tau, \mathbf{x}(t)) \\ &= x_j(t) + \tau f_j(\mathbf{x}(t)) + O(\tau^2). \end{aligned} \tag{8.27}$$

So finden wir auch

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k} = \delta_{j,k} + \tau \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t))}{\partial x_k(t)} + O(\tau^2). \tag{8.28}$$

Wir verwenden nun, dass für nichtsinguläre symmetrische und strikt positive Matrizen A gilt, dass

$$\log \det(A) = \operatorname{tr} \log(A), \tag{8.29}$$

wobei der linke Logarithmus der übliche Logarithmus ist über positive reelle Zahlen und der rechte der Matrixlogarithmus. So ist

$$\det(M(t,\tau)) = 1 + \tau \sum_{j=1}^{2f} \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t))}{\partial x_j(t)} + O(\tau^2), \tag{8.30}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \det(M(t,\tau)) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \det(M(t,\tau))|_{\tau=0} \\ &= \sum_{j=1}^{2f} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Hier bestimmt das Vorzeichen, ob das Volumen $V(t)$ zur Zeit t anwächst oder abnimmt. Nota bene haben wir bisher nicht verwendet, dass wir ein Hamiltonsches System vorliegen haben. Diese Einschänkung wollen wir nun machen. Dann haben $f_1, \ldots, f_f$ ja die Form

$$f = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_f}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_f} \right). \tag{8.32}$$

Für ein Hamiltonsches System ist so

$$\frac{\partial}{\partial t} \det(M(t,\tau)) = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j} \right) = 0, \tag{8.33}$$

für alle Zeiten $t \geq 0$. Das ist hochinteressant. Diese Aussage ergibt sich also aus der Vertauschbarkeit der Ableitungen. Und es kommen zwei Ableitungen ins Spiel. Eine aus der Transformationsformel für Gebietsintegrale. Und die anderen aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, gerade mit dem richtigen Vorzeichen. Es ist also

$$V(t) = \text{const}, \tag{8.34}$$

was genau das ist, was zu zeigen war. Wiederum, nur das Volumen, nicht die Form von $G(t)$ ist erhalten, und wir werden auf diesen tiefen Punkt später zurückkommen, wenn wir uns vergegenwärtigen, wie Hamiltonsche Mechanik – die ja in jeder Hinsicht reversibel erscheint und auch zeitumkehrinvariant ist – und die Beobachtung eines Zeitpfeils in der Natur zusammenpassen.

8.3.5 Mathematisches Intermezzo: Matrixfunktionen

Wir haben in Kapitel 2 gesehen, dass man eine beliebige symmetrische Matrix (mit angepasster Notation) $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisieren als

$$OAO^T = D, \tag{8.35}$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist und $O \in O(n)$. Also ist

$$A = O^T DO. \tag{8.36}$$

Eine *Matrixfunktion* einer symmetrischen Matrix M ist für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(A) = O^T f(D)O. \tag{8.37}$$

Hierbei ist die Funktion f einfach auf die Diagonalelemente anzuwenden. Dies ist etwas anderes, als im allgemeinen die Funktion auf alle Einträge der Matrix anzuwenden. So sieht man auch, dass man in obiger Formel ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, dass die Matrizen diagonal sind. So sieht man sofort, dass

$$\log\det(D) = \operatorname{tr}\log(D) \tag{8.38}$$

gilt.

8.3.6 Deterministisches Chaos

Nun haben wir schon einige interessante Eigenschaften von dynamischen Systemen, insbesondere Hamiltonschen dynamischen Systemen, kennengelernt, aber die bemerkenswerteste werden wir nun zuletzt ansehen. Deterministisches Chaos tritt sowohl in Hamiltonschen wie auch in dissipativen Systemen auf.

- Die definierende Eigenschaft, *deterministisch* zu sein, ist, dass wenn die Koordinaten $\mathbf{r}(t)$ bekannt sind für eine beliebige Zeit $t \geq 0$, auch $\mathbf{r}(t+\tau)$ fest vorgegeben ist für alle $\tau > 0$.
- *Chaos* heißt, dass die Trajektorienen zwar deterministisch sind, aber nahe beieinander liegende Trajektorien in der Zeit exponentiell voneinander divergieren.

Seien zwei Trajektorien vorgegeben,

$$t \mapsto \mathbf{r}_1(t), \tag{8.39}$$
$$t \mapsto \mathbf{r}_2(t), \tag{8.40}$$

mit

$$\varepsilon(t) = \|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\|. \tag{8.41}$$

Ein chaotisches System wird ein Verhalten zeigen, dass $t \mapsto \varepsilon(t)$ exponentiell divergieren wird, auch wenn $\varepsilon(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ sehr klein ist. Man definiert

$$\lambda := \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \frac{|\varepsilon(t)|}{|\varepsilon(0)|} \tag{8.42}$$

als den *Lyapunov-Exponenten*.

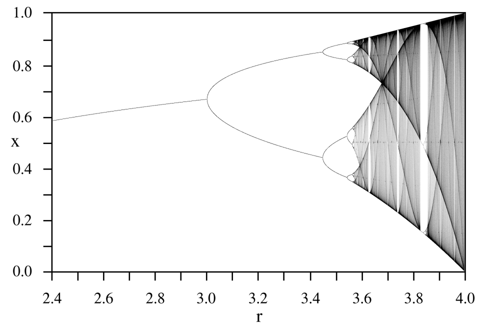

Abbildung 8.1: Eine Bifurkation in einem chaotischen System (Bildquelle: Wikipedia).

Wenn er $\lambda > 0$ erfüllt, wird ein System chaotisch sein. Dies heißt, dass es zwar nach wie vor deterministisch ist. Allerdings muss man *exponentielle Präzision* in der Anfangsbedingung sicherstellen, um später Dynamiken wiederzufinden, die ähnlich sind. Tatsächlich sind viele Systeme chaotisch. Das Wetter etwa: Daher ist es auch so schwierig, Wettervorhersagen zu machen: Für lange Vorhersagen bräuchte man unrealistisch detaillierte Information über die Anfangsbedingung. Es gibt auch rein Hamiltonsche Systeme, die chaotisch sind. *Billiards* sind als solche bekannt, bestimmt durch ihre Randbedingungen. Ein einfaches chaotisches System mit Dissipation ist das eindimensionale dynamische System

$$\ddot{r}(t) + \alpha r(t) = -U'(r(t)) + f \sin(\omega t) \tag{8.43}$$

wobei

$$U' = \frac{d}{dr} U \tag{8.44}$$

ist, mit $\alpha, \omega > 0$ passend, mit einem *Doppeltopfpotential* $r \mapsto U(r)$. Dies ist ein *getriebener dissipativer Oszillator*. Chaos ist spannend, weil es die Betonung auf die Genauigkeit in Anfangsbedingungen legt. Ein chaotisches System wird sich “zufällig” bewegen, auch wenn es durch seine Anfangsbedingungen im Prinzip völlig bestimmt ist.