Analytische Mechanik (20113401)

Vorlesender: Jens Eisert.

Kapitel 5: Lagrangesche Methode erster Art

Inhaltsverzeichnis

5 Lagrangesche Methode erster Art **5**
5.1 Vorbemerkungen 5
5.1.1 Einleitung 5
5.1.2 Das Beispiel des geometrischen Pendels 6
5.2 Mathematisches Intermezzo 7
5.2.1 Freiheitsgrade 7
5.2.2 Mannigfaltigkeiten 8
5.3 Lagrangesche Methode erster Art 9
5.3.1 Virtuelle Verrückungen 9
5.3.2 D'Alembertsches Prinzip 10
5.3.3 Lagrangesche Gleichungen erster Art 11
5.4 Beispiele 11
5.4.1 Ein Beispiel von verbundenen Massenpunkten 11
5.4.2 Bestimmung von Zwangskräften 16
5.4.3 Ein weiteres Beispiel 17

Kapitel 5

Lagrangesche Methode erster Art

5.1 Vorbemerkungen

5.1.1 Einleitung

Bisher haben wir die Newtonsche Mechanik in einer etwas mathematisierteren und gründlicheren Art untersucht als dies wohl bisher der Fall war. Allerdings sollte der konzeptuelle Rahmen recht gewohnt sein. In diesem Kapitel wollen wir erstmals richtig echtes Neuland betreten, indem wir uns die Lagrangesche Mechanik vorknöpfen.

Dieser Schritt ist einerseits ganz pragmatisch motiviert. In der Tat konnten wir bisher Bewegungsgleichungen aufstellen und zum Teil auch lösen, wie etwa Bewegungsgleichungen in einer Dimension oder die des harmonischen Oszillators. Das bisherige Vorgehen ergibt allerdings nur dann Sinn, wenn alle Kräfte des Problems bekannt sind. Wenn wir etwa an Planetenbewegungen denken, ist diese Annahme auch in der Tat plausibel und führt zu einer sehr guten Beschreibung des Problems, wie wir bei der Behandlung des Keplerproblems im letzten Kapitel sahen. Allerdings gibt es eine Vielzahl von anderen Kontexten, wo diese Kräfte nicht genau bekannt sind oder sie nicht einmal wirklich interessieren – allerdings ist deren Wirkung wohlbekannt. Wenn sich etwa Körper auf Flächen bewegen, tritt eine solche Situation auf. Diese Situation läßt sich mit der Lagrangesche Mechanik gut beschreiben.

Andererseits ist das Vorgehen konzeptuell motiviert und wird uns ein neues Bild der Mechanik erlauben. Die Quantenfeldtheorie baut auch auf Lagrangeschen Methoden auf, also ist das Vorgehen in diesem Kapitel wegweisend. Auf sie baut auch die Hamiltonsche Mechanik auf, die wir im folgenden Kapitel kennenlernen, die die elementare Quantenmechanik bestimmt.

5.1.2 Das Beispiel des geometrischen Pendels

Wir haben bereits die harmonische Bewegung eines Pendels oder einer Federauslenkung mit kleinen Auslenkungen angesehen, haben da aber einen subtilen und interessanten Punkt unter den Tisch gekehrt. In der Tat kann man die Auslenkung einer Feder als praktisch eindimensionales Problem auffassen. Beim Pendel ist dies zwar zu einer guten Näherung auch möglich. Wenn wir weiter gehen wollen in unserer Beschreibung, stehen wir allerdings vor dem Problem, dass wir die wirkenden Kräfte nicht kennen.

Wenn wir konkret ein Pendel ansehen, das im Ursprung an einem Faden der Länge $l > 0$ aufgehängt ist, dessen Bahnkurve $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ ist, wirken offensichtlich zwei Kräfte: Dies ist einerseits die bekannte Gravitationskraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, die in 3-Richtung senkrecht nach unten zeigt. Aber es wirkt noch eine weitere Kraft, die den Massenpunkt dazu zwingt, aber der Kugelschale zu bleiben. Wir wissen, dass für das Pendel

$$|\mathbf{r}(t)|^2 - l^2 = 0 \tag{5.1}$$

gilt. Nach allem, was wir wissen, muss hierfür eine Kraft verantwortlich sein. Wir wollen sie *Zwangskraft* $\mathbf{Z}(t)$ nennen. Wir kennen also die Kraft nicht, wohl aber dessen Wirkung. Wir können die Bewegungsgleichung formal aufstellen,

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) + \mathbf{Z}(t), \tag{5.2}$$

kennen hier aber $\mathbf{Z}(t)$ nicht, sondern die resultierende *Zwangsbedingung*, die durch Gleichung (5.1) festgelegt ist. Die Kraft bewirkt also, dass die Bewegung in einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, einer zweidimensionalen Fläche, verläuft, auf der die Zwangskraft immer senkrecht steht (allerdings mit einer noch unbekannten Stärke).

Dieses Wissen können wir in der Lösung ausnutzen. Es muss ja so

$$\mathbf{Z}(t) = x(t)\mathbf{r}(t) \tag{5.3}$$

gelten mit einer unbekannten Abhängigkeit $t \mapsto x(t)$. Die resultierenden Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) + x(t)\mathbf{r}(t) \tag{5.4}$$

sind zusammen mit $|\mathbf{r}(t)|^2 - l^2 = 0$ aber ein System von Differentialgleichungen für $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ und $t \mapsto x(t)$. Diese Differentialgleichungen können wir lösen. Dies ist eine Strategie, die wir allgemeiner verfolgen werden. Man nennt diesen dann allgemein formulierten Ansatz auch Langangesche Methode erster Art.

Wir können das Problem aber auch geometrischer motiviert angehen. Wir können ja die Bewegungsgleichung auf die Fläche projizieren, indem wir Vektoren finden, die zu allen Zeiten tangential zur Fläche liegen, die $\mathbf{r}(t)$ begleiten. Wenn wir dann die Bewegungsgleichungen mit solchen Vektoren über ein Skalarprodukt multiplizieren, wird die unbekannte Kraft $\mathbf{Z}(t)$ verschwinden: Skalarprodukte von senkrechten Vektoren nehmen immer den Wert Null an. So wissen wir tatsächlich zunächst nichts über den Betrag von $\mathbf{Z}(t)$, aber diesen können wir a-posteriori bestimmen. Solche Vektoren lassen sich leicht finden, indem wir Koordinaten wählen, die die Bewegung auf der Fläche direkt parametrisieren. Dies sind natürlich in diesem Falle Polarkoordinaten. Wir schreiben

$$\mathbf{r}(t) = r(t)(\sin\theta(t)\cos\phi(t), \sin\theta(t)\sin\phi(t), -\cos\theta(t)), \tag{5.5}$$

wobei die Zwangsbedingungen gerade $r(t) = l$ für alle $t \geq 0$ implizieren. Die verbleibenden Koordinaten sind also $\theta(t), \phi(t) \in \mathbb{R}$. Wir können also $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ auffassen als Funktion von $t \mapsto \theta(t), \phi(t)$, also etwas pedantisch gesprochen eine Funktion $\mathbf{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definieren mit

$$\mathbf{R}(\theta, \phi) = l(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, -\cos\theta), \tag{5.6}$$

so dass natürlich $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{R}(\theta(t), \phi(t))$ für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt. Die Zwangsbedingung

$$\mathbf{R}(\theta, \phi)^2 + l^2 = 0 \tag{5.7}$$

führt durch Ableitung zu

$$\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} = 0, \;\; \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = 0. \tag{5.8}$$

Letztere Gleichungen meinen gerade, dass die Bewegung auf die Fläche eingeschränkt ist. Wenn wir die Bewegungsgleichungen (5.4) mit diesen partiellen Ableitungen im Skalarprodukt multiplizieren, erhalten wir

$$m\ddot{\mathbf{R}}(\theta(t), \phi(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta}(\theta(t), \phi(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(\theta(t), \phi(t))) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta}(\theta(t), \phi(t)), \tag{5.9}$$

sowie

$$m\ddot{\mathbf{R}}(\theta(t), \phi(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi}(\theta(t), \phi(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(\theta(t), \phi(t))) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi}(\theta(t), \phi(t)). \tag{5.10}$$

Diese beiden Gleichungen enthalten $t \mapsto x(t)$ nicht mehr, das wir eliminiert haben. A posteriori, im Nachgang gewissermaßen, kann man diese Zwangskraft allerdings doch finden, da ja

$$\mathbf{Z}(t) = m\ddot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \tag{5.11}$$

gilt. Auch diese Strategie werden wir allgemein verfolgen: Sie wird Lagrangesche Methode zweiter Art genannt.

5.2 Mathematisches Intermezzo

5.2.1 Freiheitsgrade

Es lohnt, hier ein wenig innezuhalten und sich die Geometrie der Bewegung zu verinnerlichen. Ein System von n Punktteilchen hat die Ortskoordinaten $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, die wir oben im Vektor

$$\bar{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3n} \tag{5.12}$$

zusammengefasst haben. Zusätzlich mögen J Zwangsbedingungen vorliegen, in der Form

$$S_j(\bar{r}, t) = 0, \;\; j = 1, \ldots, J. \tag{5.13}$$

Für jedes j stellt so

$$A_j(t) = \left\{\bar{r} : \bar{r} \in \mathbb{R}^{3n}, S_j(\bar{r}, t) = 0\right\} \tag{5.14}$$

eine Hyperfläche von $3n-1$ Dimensionen im $\mathbb{R}^{3n}$ dar. Die Dynamik der Punktteilchen wird im Schnitt dieser Flächen

$$A(t) := \bigcap_{j=1}^{J} A_j(t) \tag{5.15}$$

verlaufen, da ja alle der Zwangsbedingungen erfüllt sein müssen. Dies ist die Menge aller möglichen Ortskoordinaten der Massenpunkte zur Zeit $t \geq 0$. Diese Menge hat die Dimension

$$f = 3n - J. \tag{5.16}$$

Diese Dimension nennt man auch die Zahl der *Freiheitsgrade* des Systems. Im Beispiel des Pendels war $J = 1$, weil es eine Zwangsbedingung gab, $n = 1$, weil es sich um ein Teilchen handelte und also $f = 2$, die Zahl der verbleibenden Freiheitsgrade. Zwangsbedingungen der Form

$$S_j(\bar{r}, t) = 0, \;\; j = 1, \ldots, J, \tag{5.17}$$

nennt man auch *holonome Zwangsbedingungen*. Wenn $t \mapsto A(t)$ zeitlich konstant ist, heißen die Zwangsbedingungen auch *holonom-skleronom*.

5.2.2 Mannigfaltigkeiten

In der Tat finden wir hier die Struktur einer Mannigfaltigkeit, und wir werden dies als Entschuldigung nehmen, um kurz über diese Struktur zu sehen. Eine Mannigfaltigkeit ist anschaulich gesprochen ein topologischer Raum, der lokal so aussieht wie der $\mathbb{R}^d$ für ein d. Hier wollen wir nicht zu pedantisch sein, ein topologischer Raum ist lediglich einer, in dem wir von offenen Mengen sprechen können[1]. Eine *Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum M mit abzählbarer Basis, für welchen es ein $d \in \mathbb{N}$ so gibt, so dass für jedes $m \in M$ eine offene Umgebung U von m und ein Homöomorphismus [2]

$$\phi : U \to U_\phi \tag{5.18}$$

von U auf eine offene Teilmenge U_ϕ des $\mathbb{R}^d$ existiert. Letzteres meint gerade, dass die Mannigfaltigkeit lokal wie der $\mathbb{R}^d$ aussieht. Die Zahl d heißt dabei die *Dimension*

[1]Der Vollständigkeit halber doch als Fußnote: Eine *Topologie* ist ein Mengensystem T, bestehend aus Teilmengen einer Grundmenge X, die *offen* genannt werden, und die die folgenden Axiome erfüllen.

- Die leere Menge und die Grundmenge X sind offen.
- Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen. Es genügt hierbei zu fordern, dass der Durchschnitt von zwei offenen Mengen offen ist.
- Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Man nennt dann T eine *Topologie* auf X und das Paar (X, T) einen *topologischen Raum*.

[2]Ein *Homöomorphismus* ist eine Funktion f, für die

- f bijektiv ist, sowie
- f stetig und
- f^{-1} stetig sind.

der Mannigfaltigkeit, der Homöomorphismus ϕ ist eine *Karte*, und das System aller Karten der *Atlas* von M. Sind $\phi : U \to U_\phi$ und $\psi : V \to V_\psi$ zwei Karten von M mit $U \cap V \neq \emptyset$, so nennt man die Abbildung

$$\psi \circ \phi^{-1} : U_\phi \to V_\psi \tag{5.19}$$

einen *Kartenwechsel*. Ein Kartenwechsel ist gewissermaßen eine Umparametrisierung. Der obige Schnitt, der die Freiheitsgrade eines Systems parametrisiert, ist eine Mannigfaltigkeit in diesem Sinne. Unser obiges Beispiel des Pendels zeigt auch, wozu die Komplikation der Karten notwendig ist. Zwar sieht die Dynamik lokal stets aus wie der $\mathbb{R}^2$, was gerade die Zahl der Freiheitsgrade $f = 2$ entspricht. Allerdings liegt die Dynamik auf der zweidimensionalen Sphäre im $\mathbb{R}^3$. Mehrere Karten lassen die Mannigfaltigkeit allerdings dennoch parametrisieren.

5.3 Lagrangesche Methode erster Art

5.3.1 Virtuelle Verrückungen

Die Lagrangesche Mechanik liefert einen Rahmen, mit solchen Zwangskräften sehr elegant umzugehen. Allerdings handelt es sich hier nicht um ganz neue Physik: Man kann Systeme mit solchen holonomen Zwangsbedingungen auffassen als Punktteilchen, die durch starke elastische Kräfte auf der Mannigfaltigkeit $A(t)$ gehalten werden. Die Zwangskräfte sind dann Grenzfälle gewöhnlicher elastischer Kräfte, abgesehen davon, dass man sie freilich a-priori meist nicht genau kennt – das ist ja gerade der Punkt der Lagrangeschen Methoden.

Die Zwangskräfte $\mathbf{Z}_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, kann man auch zu einer $3n$-dimensionalen Zwangskraft $\bar{Z}(t)$ zusammenfassen, die dafür sorgt, dass die Dynamik stets auf $A(t)$ eingeschränkt bleibt. Bei Abwesenheit weiterer äußerer Kräfte ist dann jeder Punkt $\bar{r} \in A(t)$ eine mögliche Gleichgewichtslage. Eine Verschiebung längs $A(t)$ ist dann ohne Widerstand möglich. Dies heißt, geometrisch gesprochen, dass die Zwangskraft $\bar{Z}(t)$ keine Komponente tangential zu $A(t)$ hat und somit senkrecht auf $\bar{Z}(t)$ steht.

Tangentialvektoren auf $A(t)$ heißen *virtuelle Verrückungen*. In der Tat sind solche Tangentialvektoren für allgemeine Mannigfaltigkeiten definiert. Wir wollen hier jedoch konkreter am Problem bleiben. Jeder Tangentialvektor ξ_j an $A_j(t)$ im Punkt $\bar{r}_0$ läßt sich darstellen als

$$\xi_j = \frac{d\bar{r}(\sigma)}{d\sigma}|_{\sigma=0} \tag{5.20}$$

wobei $\sigma \mapsto \bar{r}(\sigma)$ eine parametrisierte Kurve in $A_j(t)$ ist die für $\sigma = 0$ in $\bar{r}_0 \in A_j(t)$ beginnt. Da $S_j(\bar{r}(\sigma), t) = 0$ gilt, ist auch

$$\frac{d}{d\sigma} S_j(\bar{r}(\sigma), t)|_{\sigma=0} = 0, \tag{5.21}$$

und so

$$\frac{d}{d\sigma} S_j(\bar{r}(\sigma), t)|_{\sigma=0} = \frac{d\bar{r}(\sigma)}{d\sigma} \cdot \nabla S_j(\bar{r}(\sigma), t)|_{\sigma=0} = \xi_j \cdot \nabla S_j(\bar{r}_0, t) = 0. \tag{5.22}$$

Damit sind auf $A_j(t)$ senkrechte Vektoren parallel zu $\nabla S_j(\bar{r}_0, t)$. So stehen alle Vektoren $\nabla S_j(\bar{r}, t)$ mit $\bar{r} \in A(t)$ senkrecht auf

$$A(t) = \bigcap_{j=1}^{J} A_j(t). \tag{5.23}$$

Die Zwangskraft $\bar{Z}(t)$, die selbst senkrecht auf $A(t)$ steht, lässt sich so als Linearkombination dieser Vektoren darstellen als

$$\bar{Z}(t) = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j(t) \nabla S_j(\bar{r}, t). \tag{5.24}$$

Für unabhängige Zwangsbedingungen sind die Gradienten $\lambda_j(t)\nabla S_j$ fast überall linear unabhängig und so die Koeffizienten $\lambda_j(t)$ durch $\bar{Z}(t)$ eindeutig bestimmt.

5.3.2 D'Alembertsches Prinzip

Wir wollen nun noch konkreter werden, indem wir die f Variablen $q_1, \ldots, q_f$ einführen für f Freiheitsgrade, $f = 3N - J$, die $A(t)$ zu einer Zeit $t \geq 0$ parametrisieren (wobei also f seine Dimension ist), $f = 3n - J$. Hier haben wir streng genommen die Annahme gemacht, dass wir einen solchen Koordinatensatz finden können und nicht mehrere Karten in einem Atlas einer Mannigfaltigkeit brauchen. Diese Komplikation lässt sich allerdings schnell überwinden, indem man lokal das Problem betrachtet. Wir wollen also im folgenden annehmen, dass wir einen solchen Koordinatensatz finden können. Diese Koordinaten parametrisieren also die Bewegung auf $A(t)$. Die zulässigen Lagen sind also durch

$$\bar{r}(q_1, \ldots, q_f, t) \tag{5.25}$$

bestimmt, wobei die $q_1, \ldots, q_f$ innerhalb bestimmter Grenzen frei veränderlich sind. Natürlich gilt

$$\bar{r}(q_1, \ldots, q_f, t) \in A(t) \tag{5.26}$$

und so sind $\partial \bar{r} / \partial q_j$ virtuelle Verrückungen, also Tangentialvektoren an $A(t)$. Eine allgemeine virtuelle Verrückung (meint also einen Tangentialvektor an $A(t)$) im Punkt $\bar{r}(q_1, \ldots, q_f, t)$ kann man also schreiben als

$$\delta \bar{r} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \delta q_j = (\delta \mathbf{r}_1, \ldots, \delta \mathbf{r}_n). \tag{5.27}$$

Die Aussage, dass $\bar{Z}(t)$ senkrecht auf $A(t)$ steht, nennt man das *d'Alembertsche Prinzip*.

D'Alembertsches Prinzip: Die Zwangskraft $\bar{Z}(t)$ steht senkrecht auf $A(t)$ und es gilt

$$\bar{Z} \cdot \delta \bar{r} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Z}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j = 0. \tag{5.28}$$

Da $\delta \bar{r}$ ein Wegstück entlang $A(t)$ ist, heißt auch, dass die Zwangskräfte keine virtuelle Arbeit leisten, also keine Arbeit entlang einer virtuellen Verrückung. Dies ist insbesondere im skleronomen Fall interessant, wo also A keine Zeitabhängigkeit hat. Dann gehören zu virtuellen Verrückungen physikalisch realisierbare Verschiebungen, so dass die Zwangskräfte keine Arbeit leisten.

5.3.3 Lagrangesche Gleichungen erster Art

Wenn sich die inneren und äusseren Kräfte (abgesehen von den Zwangskräften) aus einem Potential ableiten lassen, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\nabla U(\bar{r}(t), t) + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \nabla S_j(\bar{r}(t), t). \tag{5.29}$$

Ausgeschrieben erhalten wir so die folgenden Gleichungen.

Lagrangesche Gleichungen erster Art: Die $3n$ Gleichungen

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k(t) = -\nabla_k U(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t), t) + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \nabla_k S_j(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t), t) \tag{5.30}$$

für $k = 1, \ldots, n$ heißen zusammen mit den J Gleichungen

$$S_j(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t), t) = 0, \quad j = 1, \ldots, J, \tag{5.31}$$

die $3n + J$ *Lagrangesche Gleichungen erster Art*.

Die Grundidee des Ansatzes besteht also daran, die Bewegungsgleichungen aufzustellen, mitsamt den noch unbekannten Variationsparametern, um für $3n + J$ Differentialgleichungen $3n + J$ Größen zu bestimmen.

5.4 Beispiele

5.4.1 Ein Beispiel von verbundenen Massenpunkten

Zunächst einmal mag nicht ganz offensichtlich scheinen, wie man diese Einsichten praktisch nutzen kann. Wir wollen dies daher an einem Beispiel veranschaulichen. Es wird wieder eine Art Pendel betrachtet, allerdings ein etwas anderes als oben. Wir betrachten zwei Massenpunkte, also $n = 2$. Der erste Massenpunkt mit Masse m_1 kann sich nur entlang der 1-Achse bewegen. Um die Diskussion zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dass die Dynamik stets auf die $1 - 2$-Ebene stattfindet, und wir so die Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ betrachten wollen. Alternativ könnten wir auch die Zwangsbedingung dazu nehmen, dass die 3-Koordinate auf den Wert Null eingeschränkt ist. Zudem Die Tatsache, dass der erste Massenpunkt sich nur auf der 1-Achse bewegen kann, heisst, dass $\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ – um die Notation hier zu vereinfachen, wollen wir hier $\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ schreiben und nicht $\mathbf{r}_1(t) = ((\mathbf{r}_1(t))_1, (\mathbf{r}_1(t))_2)$, was übersichtlicher scheint – eingeschränkt ist auf

$$\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), 0) \tag{5.32}$$

für alle Zeiten $t \geq 0$. Der zweite Massenpunkt mit Masse m_2 sei mit dem ersten mit einer Stange der Länge l verbunden. Für $\mathbf{r}_1(t)$ und $\mathbf{r}_2(t)$ lauten also die Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), t) &= y_1(t) = 0, && (5.33) \\ S_2(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), t) &= (x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2 - l^2 \\ &= 0. && (5.34) \end{aligned}$$

Die Zwangskräfte nehmen die Form an

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}\right)(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2) \\ &= (2\lambda_2(x_1 - x_2), 2\lambda_2(y_1 - y_2) + \lambda_1), && (5.35) \\ \mathbf{Z}_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2) \\ &= (-2\lambda_2(x_1 - x_2), -2\lambda_2(y_1 - y_2)). && (5.36) \end{aligned}$$

Ein Moment des Nachdenkens zeigt, dass wir nun (da wir die Bewegung auf die $1-2$-Ebene eingeschränkt haben), $f = 4 - 2 = 2$ Freiheitsgrade haben. Wir wollen Koordinaten q_1, q_2 auf der passenden Mannigfaltigkeit einführen wie oben beschrieben. Eine sinnvolle Wahl von Koordinaten ist

$$\begin{aligned} q_1(t) &= x_1(t), && (5.37) \\ q_2(t) &= \phi(t), && (5.38) \end{aligned}$$

wobei $t \mapsto \phi(t)$ den Winkel des Pendels bezeichnet. Die alten Koordinaten ergeben sich so zu

$$\begin{aligned} x_1(t) &= q_1(t), && (5.39) \\ y_1(t) &= 0, && (5.40) \\ x_2(t) &= q_1(t) + l \sin q_2(t) =: x_2(q_1(t), q_2(t)), && (5.41) \\ y_2(t) &= -l \cos q_2(t) =: y_2(q_1(t), q_2(t)). && (5.42) \end{aligned}$$

Die Zwangskräfte sind also so

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(t) &= (-2\lambda_2(t) l \sin q_2(t), \lambda_1(t) + 2\lambda_2(t) l \cos q_2(t)) && (5.43) \\ &= (0, \lambda_1(t)) - 2\lambda_2(t) l (\sin q_2(t), -\cos q_2(t)), \\ \mathbf{Z}_2(t) &= 2\lambda_2(t) l (\sin q_2(t), -\cos q_2(t)). && (5.44) \end{aligned}$$

Die Zwangskraft $\mathbf{Z}_1(t)$ hat also zwei Beiträge: Einen Beitrag $(0, \lambda_1(1))$ in die 2-Richtung, resultierend aus der Zwangsbedingung, dass $S_1 = 0$ ist. Dieser Anteil sorgt gerade dafür, dass das erste Punktteilchen auf der 1-Achse mit $y_1 = 0$ bleibt. Der zweite Beitrag zu $\mathbf{Z}_1(t)$ ist entgegengesetzt zu $\mathbf{Z}_2(t)$. Dieser Anteil stellt sicher, dass der Abstand der beiden Punktteilchen tatsächlich stets l beträgt. $\mathbf{Z}_2(t)$ nimmt so also die Rolle eines Zuges auf das erste Teilchen ein. In der Tat zeigt $\mathbf{Z}_2(t)$ gerade zum ersten Punktteilchen. Die 2-Komponenten von $\mathbf{Z}_1(t)$ und $\mathbf{Z}_2(t)$ addieren sich zu Null. Wie sehen nun die virtuellen Verrückungen aus? Diese sind

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_1} = (1,0), \tag{5.45}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_2} = (0,0), \tag{5.46}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_1} = (1,0), \tag{5.47}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_2} = l(\cos q_2, \sin q_2). \tag{5.48}$$

Das d'Alembertsche Prinzip besagt nun, dass

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_1} + \mathbf{Z}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_1} = 0, \tag{5.49}$$

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_2} + \mathbf{Z}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_2} = 0. \tag{5.50}$$

Beide Gleichungen sind nach Konstruktion gerade erfüllt. Wir finden für die Zwangskräfte

$$\mathbf{Z}_1(t) = (-\lambda_2 \sin q_2, \lambda_1), \tag{5.51}$$

$$\mathbf{Z}_2(t) = \lambda_2(\sin q_2, -\cos q_2). \tag{5.52}$$

Die Lagrangeschen Gleichungen erster Art sind so also

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1(t) = m_1\mathbf{G} + \mathbf{Z}_1(t), \tag{5.53}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2(t) = m_2\mathbf{G} + \mathbf{Z}_2(t), \tag{5.54}$$

mit den Zwangsbedingungen

$$y_1 = 0, \tag{5.55}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0. \tag{5.56}$$

Hier ist wie in Kapitel 2 $\mathbf{G}$ die Gravitationskraft, die hier im $\mathbb{R}^2$ die Form

$$\mathbf{G} = (0, -G) \tag{5.57}$$

annimmt. Diese vier Differentialgleichungen für vier Größen können direkt gelöst werden. Dies ist die Lagrangesche Methode erster Art: Man löst gewissermaßen das Problem mit etwas Gewalt, indem man die Bewegungsgleichungen mitsamt der Zwangsbedingungen löst. Mehr wehende Fahnen hat diese Methode nicht: Man nutzt die Geometrie des Problems aus uns löst so gewissermaßen die Bewegungsgleichungen mit den Zwangsbedingungen zusammen.

Wir können die Gleichungen allerdings auch mit $\partial \mathbf{r}_1/\partial q_i$ und $\partial \mathbf{r}_2/\partial q_i$ für $i = 1, 2$ skalar multiplizieren und durch Addition umformen, so dass die Zwangskräfte aufgrund des d'Alembertschen Prinzips herausfallen. Dieses Vorgehen antizipiert die Lagrangesche Methode zweiter Art – aber nun wollen wir schon eine explizite Lösung des Problems sehen. Wir werden hier alle Schritte angeben. Wir müssen hier alle Skalarprodukte mit Tangentialvektoren bilden. So erhalten wir aus (5.53)

$$m_1(\ddot{x}_1, \ddot{y}_1) \cdot (1, 0) = m_1(0, -G) \cdot (1, 0) + \mathbf{Z}_1(t) \cdot (1, 0) \tag{5.58}$$

und also

$$m_1\ddot{x}_1 \quad = \quad \mathbf{Z}_1 \cdot (1, 0). \tag{5.59}$$

Ebenso ist

$$m_2(\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) \cdot (1, 0) = m_2(0, -G) \cdot (1, 0) + \mathbf{Z}_2 \cdot (1, 0), \tag{5.60}$$

also

$$m_2\ddot{x}_2 = \mathbf{Z}_2 \cdot (1, 0), \tag{5.61}$$

Das D'Alembertsche Prinzip (5.49) verwendend, erhalten wir so

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0. \tag{5.62}$$

Das nächste Skalarprodukt mit einer partiellen Ableitung ist trivial: Wir müssen ja beide Seiten mit dem Nullvektor $(0, 0)$ multiplizieren. Wir können uns also (5.54) widmen und finden

$$m_1(\ddot{x}_1, \ddot{y}_1) \cdot (\cos q_2, \sin q_2) = m_1(0, -G) \cdot (\cos q_2, \sin q_2) + \mathbf{Z}_1(t) \cdot (\cos q_2, \sin q_2) \tag{5.63}$$

was nichts anderes ist als

$$m_1(\ddot{x}_1 \cos q_2 + \ddot{y}_1 \sin q_2) = -m_1 G \sin q_2 + \mathbf{Z}_1(t) \cdot (\cos q_2, \sin q_2), \tag{5.64}$$

da wir durch l gleich teilen können. Der andere, und letzte verbleibende, Term ist

$$m_2(\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) \cdot (\cos q_2, \sin q_2) = m_2(0, -G) \cdot (\cos q_2, \sin q_2) + \mathbf{Z}_2 \cdot (\cos q_2, \sin q_2), \tag{5.65}$$

also

$$m_2(\ddot{x}_2 \cos q_2 + \ddot{y}_2 \sin q_2) = -m_2 G \sin q_2 + \mathbf{Z}_2 \cdot (\cos q_2, \sin q_2). \tag{5.66}$$

Wieder ist es ratsam, diese Terme zu addieren und das D'Alembertsche Prinzip (5.50) zu verwenden. So erhalten wir

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{x}_1 \cos q_2 + \ddot{y}_1 \sin q_2) + m_1 G \sin q_2 \\ -m_2(\ddot{x}_2 \cos q_2 + \ddot{y}_2 \sin q_2) + m_2 G \sin q_2 = 0. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Wir fassen hier (5.62) und (5.67) noch einmal zusammen. Dies sind

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0, \tag{5.68}$$

$$m_2\ddot{x}_2\cos q_2 + (m_2\ddot{y}_2 + m_2 G)\sin q_2 = 0. \tag{5.69}$$

Nach Konstruktion haben wir also die Zwangskräfte eliminiert, freilich zu dem Preis, dass die Gleichungen komplizierter werden. Fassen wir die alten Koordinaten als Funktion der neuen (q_1, q_2) auf, wobei $x_1 = q_1$ ist, erhält man zwei Gleichungen für $t \mapsto q_1(t)$ und $t \mapsto q_2(t)$, nämlich

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2 l\ddot{q}_2\cos q_2 - m_2 l\dot{q}_2^2\sin q_2 = 0, \tag{5.70}$$

$$\begin{aligned} m_2\cos q_2(\ddot{q}_1 + l\ddot{q}_2\cos q_2 - l\dot{q}_2^2\sin q_2) & \\ + \sin q_2(m_2 l\ddot{q}_2\sin q_2 + m_2 l\dot{q}_2^2\cos q_2 + m_2 G) &= 0. \end{aligned} \tag{5.71}$$

Dies lässt sich umformen zu

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 = m_2 l(\dot{q}_2^2\sin q_2 - \ddot{q}_2\cos q_2), \tag{5.72}$$

$$\ddot{q}_1\cos q_2 + l\ddot{q}_2 + G\sin q_2 = 0. \tag{5.73}$$

Diese Gleichungen können durch einfache Integration gelöst werden. In der Tat kommen wir auch so zu geschlossenen Gleichungen, die allerdings ziemlich kompliziert aussehen. Um das Verhalten des Pendels etwas plakativ besser studieren zu können, nachdem wir so weit gekommen sind, wollen wir sehen, wie sich das Pendel bewegt für kleine Auslenkungen von q_1 und q_2. In niedrigster Ordnung in einer Taylorreihe von $\sin(x) = x + \ldots$ und $\cos(x) = 1 - \ldots$ ergeben sich die approximativ gültigen Gleichungen Gleichungen

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 \approx -m_2 l\ddot{q}_2, \tag{5.74}$$

$$\ddot{q}_1 + l\ddot{q}_2 + Gq_2 \approx 0. \tag{5.75}$$

Nun können wir die erste Gleichung in die zweite einsetzen. So finden wir

$$\ddot{q}_2\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) + \frac{G}{l}q_2 \approx 0 \tag{5.76}$$

also nichts anderes als

$$\ddot{q}_2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1}\frac{G}{l}q_2 \approx 0, \tag{5.77}$$

die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators. Wenn wir uns also fragen, wie sich das Pendel bewegt, finden wir in dieser linearen Approximation

$$q_2(t) \approx q_2(0)\cos(\omega t) \tag{5.78}$$

mit der quadrierten Frequenz

$$\omega^2 := \frac{m_1 + m_2}{m_1}\frac{G}{l}. \tag{5.79}$$

Die Frequenz des zweiten Massenpunktes ist also verändert gegenüber der Frequenz eines fest aufgehängten Pendels, wo wir $\omega^2 = G/l$ erwarten würden, um einen Faktor $(m_1 + m_2)/m_1$. Wenn der erste Massepunkt anfänglich in Ruhe ist, also $q_1(0) = 0$ und $\dot{q}_1(0) = 0$ gilt ist

$$q_1(t) \approx -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} q_2(0) \cos(\omega t). \tag{5.80}$$

Der erste Massenpunkt schwingt also ebenso hin und her, mit der gleichen Frequenz. Mit welcher Amplitude, bestimmt das Verhältnis der Massen. Für sehr große Massen m_1 finden wir einfach wieder das bekannte Pendel, bei dem sich q_1 nahezu gar nicht bewegt und die Frequenz im wesentlichen die bekannte mit $\omega^2 = G/l$ ist.

5.4.2 Bestimmung von Zwangskräften

Wir haben gesehen, dass die Zwangskräfte gegeben sind durch

$$\bar{Z}(t) = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j(t) \nabla S_j(\bar{r}, t), \tag{5.81}$$

für die Zwangsbedingung $S_j(\bar{r}, t) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, J$. Wenn wir die Zwangskraft für die Zwangsbedingung $S_k(\bar{r}, t) = 0$ für ein k finden wollen, so können wir Verrückungen $\delta\bar{r}_k$ finden, die

$$S_j(\bar{r}, t) = 0 \tag{5.82}$$

erfüllen für alle $j \in \{1, \ldots, J\} \backslash \{k\}$, aber die eine Zwangsbedingung k verletzen als

$$S_k(\bar{r}, t) \neq 0. \tag{5.83}$$

Dies sind keine virtuellen Verrückungen. Für sie gilt

$$\delta\bar{r}_j \cdot \nabla S_j = 0 \tag{5.84}$$

für alle $j \in \{1, \ldots, J\} \backslash \{k\}$ und

$$\delta\bar{r}_k \cdot \nabla S_k \neq 0. \tag{5.85}$$

Wir können

$$\bar{Z} = \dot{\bar{p}} + \nabla U \tag{5.86}$$

mit $\delta\bar{r}_k$ multiplizieren, um so

$$\bar{Z} \cdot \delta\bar{r}_k = (\dot{\bar{p}} + \nabla U) \cdot \delta\bar{r}_k \tag{5.87}$$

zu erhalten, woraus wir die Zwangskraft $\bar{Z}$ berechnen können.

5.4.3 Ein weiteres Beispiel

Wir betrachten eine Brückenkonstruktion mit fünf Knotenpunkten, von denen Knoten 3 und Knoten 5 fest eingespannt sind. Die anderen Abstände zwischen den Knoten werden durch Stangen gleich gehalten, die Zwangskräfte mediieren. Zunächst wollen wir die gesamte potentielle Energie des Gebildes bestimmen. Dies ist einfach. Sie ist zu berechnen aus der Gesamtmasse m, die man sich als im Massenschwerpunkt $\mathbf{R}(t)$ konzentriert vorstellt und ergibt sich zu

$$U = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}, \tag{5.88}$$

wobei letzterer Schwerpunkt natürlich konstant in der Zeit ist.

Wir wollen uns nun den Zwangskräften zuwenden. Aus offensichtlichen Gründen wirken die Zwangskräfte entlang der Stangen. Wir müssen also nur ihren Betrag z ermitteln. Betrachten wir etwa die Verbindungslinie zwischen den Knoten 1 und 2. Die Arbeit, die geleistet wird bei einer Verrückung $\delta\bar{r}_k$, die einer Verlängerung der Verbindungslinie um ein Stück δl entspricht, lautet

$$\bar{Z} \cdot \delta\bar{r}_k = z\delta l. \tag{5.89}$$

Andererseits ist auch

$$\bar{Z} \cdot \delta\bar{r}_k = \delta\bar{r}_k \cdot \nabla U. \tag{5.90}$$

gerade die Veränderung der potentiellen Energie des Schwerpunktes bei der Verschiebung $\delta\bar{r}_k$. Dies meint, dass

$$\bar{Z} \cdot \delta\bar{r}_k = m\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{R}, \tag{5.91}$$

wobei hier

$$\delta\mathbf{R} := \frac{d\mathbf{R}}{dl}\delta l \tag{5.92}$$

der Verschiebung des Massenschwerpunktes bei einer Längenänderung des oberen Balkens um δl ist. Bevor wir uns der Frage zuwenden wollen, wie man dies berechnet, wollen wir konstatieren, dass

$$z\delta l = m\mathbf{g} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dl}\delta l, \tag{5.93}$$

also

$$z = m\mathbf{g} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dl}. \tag{5.94}$$

Wir haben die Zwangskraft also gefunden, indem wir $d\mathbf{R}/dl$ ausrechnen, wie sehr sich der Schwerpunkt verändert, wenn man die obere Verbindungslinie mit Länge l um ein Stück δl verändert. Dies ist aber nicht sehr schwierig. Die Ableitung $d\mathbf{R}/dl$ kann man aus der Geometrie des Systems recht leicht berechnen. Man findet, dass der Schwerpunkt sich senkt, wenn man die obere Verbindungslinie verkürzt. Die obere Verbindungslinie erfährt also eine Schubbeanspruchung.