Analytische Mechanik (20113401)
Vorlesender: Jens Eisert.
Kapitel 6: Lagrangesche Methode zweiter Art

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 6

Lagrangesche Methode zweiter Art

6.1 Vorbemerkungen

6.2 Lagrangesche Methode zweiter Art

6.2.1 Eliminierung von Zwangskräften durch Projektion

Wir haben die zweite Strategie der Lösung durch Eliminierung der Zwangskräfte durch Projektion auf die Mannigfaltigkeit $A(t)$ kennengelernt. Hier wollen wir diese Strategie systematisch entwickeln. Wir gehen wieder aus von den Koordinaten auf der Mannigfaltigkeit $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_f)$. Nach Konstruktion sind die Zwangsbedingungen auf dieser Mannigfaltigkeit $A(t)$ erfüllt, so dass automatisch

$$S_j(\bar{r}(\mathbf{q}, t), t) = 0 \tag{6.1}$$

für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt: Dies war ja gerade die definierende Eigenschaft dieser Mannigfaltigkeit. Wenn man die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\nabla U(\bar{r}(t), t) + \bar{Z}(t) \tag{6.2}$$

mit den Tangentialvektoren $\partial \bar{r}/\partial q_j$ an $A(t)$ von links als Skalarprodukt multipliziert, für $j = 1, \ldots, J$, kann man verwenden, dass die Skalarprodukte dieser Tangentialvektoren mit den Zwangskräften (die ja senkrecht auf $A(t)$ stehen) verschwinden. So erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \cdot \dot{\bar{p}} &= -\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \cdot \nabla U(\bar{r}(t), t) + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \cdot \bar{Z}(t) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial q_j}(\bar{r}(q_1, \ldots, q_f, t)), \end{aligned} \tag{6.3}$$

weil der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (6.3) verschwindet. Die Zwangskräfte haben wir also rasch eliminiert. Dies kommt allerdings zu einem Preis. Die linke

Seite der Gleichung ist komplizierter geworden. Wir wollen usn also diese linke Seite etwas genauer ansehen. Dieser ist nichts anderes als

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \cdot \dot{\bar{p}} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \tag{6.4}$$

nach Definition des Impulses. Wir können diesen Ausdruck nun als totale Ableitung in der Zeit ausdrücken, wobei wir allerdings einen Term zuviel erhalten, den wir in der Folge wieder abziehen. Diese Strategie verwendend finden wir

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \cdot \dot{\bar{p}} \quad = \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}\right) - \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}.$$

Dieser Ausdruck sieht nicht sehr übersichtlich aus, und wir werden ihn vereinfachen, bestimmte Ableitungen der ursprünglichen Koordinaten verwendend. Wir gehen aus von der einfachen Ableitung der alten Ortskoordinaten als Funktion der Zeit, wobei wir nachdifferenzieren müssen,

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t}. \tag{6.5}$$

So finden wir

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}. \tag{6.6}$$

Dies ist ein interessanter Ausdruck, weil der Ableitungen nach neuen Koordinaten mit den zeitlichen Ableitungen von den Koordinaten mit zeitlichen Ableitungen der verallgemeinerten neuen Koordinaten in Beziehung setzt. Weiter finden wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \quad = \quad \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_j}{\partial q_k \partial t} \tag{6.7}$$

$$= \quad \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial t}\right)$$

$$= \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial q_k}. \tag{6.8}$$

Das Einsetzen der Gleichungen (6.5) und (6.7) liefert

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \cdot \dot{\bar{p}} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} \tag{6.9}$$

$$= \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial q_k}. \tag{6.10}$$

Dies können wir in Bezug setzen zur kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 = T(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t), \tag{6.11}$$

ausgedrückt als Formel in den neuen Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_f)$ auf $A(t)$ und deren zeitlichen Ableitungen. Dies meint für die linke Seite von (6.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \cdot \dot{\bar{p}} &= \sum_{j=1}^{n} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k} && (6.12)\\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}. && (6.13) \end{aligned}$$

6.2.2 Lagrangesche Gleichungen zweiter Art

Ein Moment des Nachdenkens zeigt, dass die Ableitungen der potentiellen Energie in einer ganz ähnlichen Form gefasst werden können. Somit lassen sich die f Differentialgleichungen für $t \mapsto q_j(t)$ für $j = 1, \ldots, f$ in der folgenden Weise schreiben.

Lagrangesche Gleichungen zweiter Art: Die die Zwangskräfte respektierenden Bahnkurven $t \mapsto q_j(t)$ für $j = 1, \ldots, f$ erfüllen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{6.14}$$

mit der *Lagrange-Funktion* $L := T - U$, also

$$\begin{aligned} (q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) &\mapsto L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) && (6.15)\\ &= T(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) && (6.16)\\ &- U(\bar{r}(q_1, \ldots, q_f, t), t), \end{aligned}$$

nota bene betrachtet als Funktion der Argumente $(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t)$.

Ist die Lagrange-Funktion bekannt – was der Fall ist, sobald man die kinetische und die potentielle Energie ausgedrückt kennt – sind die auf $A(t)$ projizierten Bewegungsgleichungen leicht herzuleiten. Es ist wichtig, dass diese Funktion eine Funktion der "richtigen Koordinaten" ist, also in diesem Falle der verallgemeinerten Koordinaten. Durch diese Projektion sind die Zwangskräfte vollends eliminiert: Die Bewegungsgleichungen leben nur in der Mannigfaltigkeit, die die Zwangsbedingungen per Definition bereits inkorporiert. Dies ist praktisch wichtig, und eine praktische, tiefe und für zukünftige Überlegungen wichtige Art, Bewegungen in der analytischen Mechanik zu beschreiben. Diese Gleichungen sind zentrale Gleichungen in diesem Kurs.

6.2.3 Beispiel des sphärischen Pendels

Dies ist tatsächlich eine praktische Art vorzugehen, wie das folgende Beispiel zeigen soll, deutlich praktischer übrigens als die Lagrangeschen Methode erster Art. Wir betrachten ein Pendel mit Fadenlänge l. Diesmal soll es sich aber nicht in der $1-2$-Ebene bewegen, sondern im ganzen $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben also wieder wie gewohnt

$$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t)). \tag{6.17}$$

Naheliegende Koordinaten für unser Problem sind Kugelkoordinaten, für die

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r(t)\sin\theta(t)\cos\phi(t), & (6.18)\\ r_2(t) &= r(t)\sin\theta(t)\sin\phi(t), & (6.19)\\ r_3(t) &= -r(t)\cos\theta(t). & (6.20) \end{aligned}$$

Die Zwangsbedingung $r(t)^2 - l^2 = 0$ meint gerade $r = l$. Die Koordinaten sind also $t \mapsto \theta(t)$ und $t \mapsto \phi(t)$ und die Lagrangefunktion lautet

$$L(\theta, \phi, \dot\theta, \dot\phi) = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}), \tag{6.21}$$

wobei die alten Koordinaten in den neuen wie folgt ausgedrückt werden können,

$$\mathbf{r} = l(\sin\theta(t)\cos\phi(t), \sin\theta(t)\sin\phi(t), -\cos\theta(t)), \tag{6.22}$$

und somit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= l(\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi, & (6.23)\\ &\quad \dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi, \dot\theta\sin\theta), & (6.24)\\ U(\mathbf{r}) &= mGl(1-\cos\theta). \end{aligned}$$

Dies impliziert sofort, dass

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = l^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta). \tag{6.25}$$

In den passenden Koordinaten ist die Lagrangefunktion also explizit gegeben durch

$$L(\theta, \phi, \dot\theta, \dot\phi) = \frac{1}{2} ml^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) - mGl(1-\cos\theta). \tag{6.26}$$

Die Bewegungsgleichungen werden so also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} &= 0, & (6.27)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial\phi} &= 0. & (6.28) \end{aligned}$$

Erstere Bewegungsgleichung ist nichts anderes als

$$ml^2(\ddot\theta - \dot\phi^2\sin\theta\cos\theta) + mGl\sin\theta = 0. \tag{6.29}$$

Da L von ϕ gar nicht abhängt, meint zweitere Gleichung, dass

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0, \tag{6.30}$$

was heißt, dass die Größe

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta \tag{6.31}$$

eine in der Zeit erhaltene Größe ist. Verallgemeinerte Koordinaten q_j (meint also Koordinaten oder deren Ableitungen), von denen L nicht abhängt, nennt man auch *zyklisch*. Die Größen

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{6.32}$$

für $j = 1, \ldots, f$ sind die *verallgemeinerten Impulse*. Diese Nomenklatur ergibt viel Sinn: Immerhin ist der verallgemeinerte Impuls einer zyklischen Koordinate eine erhaltene Größe. In unserem Beispiel ist der passende verallgemeinerte Impuls $ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta$ zeitunabhängig, den wir als 3-Koordinate des Drehimpulses L_3 (nicht mit der Lagrangefunktion zu verwechseln) identifizieren

$$L_3 = ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta. \tag{6.33}$$

Kein Wunder also, dass sie erhalten ist. Um mit der Lösung der Bewegungsgleichung fortzufahren, können wir diese Erhaltungsgröße L_3 in die Gleichung (6.29) einsetzen und finden

$$ml^2\ddot{\theta} - \frac{L_3^2}{ml^2\sin^3\theta}\cos\theta + mGl\sin\theta = 0. \tag{6.34}$$

Nach Multiplikation mit $\dot{\theta}$ ist dies

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{L_3^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mGl\cos\theta)\right) = 0. \tag{6.35}$$

Da die Energie

$$E = T + U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{L_3^2}{2ml^2\sin^2\theta} + mGl(1-\cos\theta) \tag{6.36}$$

ist, meint dies gerade, dass die Energie erhalten ist. Man kann nun durch einfache Integration die Funktion

$$(E, L_3, t) \mapsto \theta(E, L_3, t) \tag{6.37}$$

bestimmen, und dann aus $L_3 = ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta$ auch

$$(E, L_3, t) \mapsto \phi(E, L_3, t). \tag{6.38}$$

Dies ist die Lösung des Problems. In der Tat ist dies in θ wiederum ein Problem, das als ein eindimensionales Problem aufgefasst werden kann in einem effektiven Potential

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{L_3^2}{2ml^2\sin^2\theta} + mGl(1-\cos\theta). \tag{6.39}$$

Wenn nun $L_3 = 0$ ist, liegt ein ebenes Pendel vor, wie wir es kennen. Sonst gibt es ein Minimum von U_{eff}, Wählt man bei vorgegebenem E den Drehimpuls L_3 passend zu diesem Minimum, erhält man eine Kreisbahn.

6.3 Abschließende Bemerkungen

6.3.1 Bezug zur Newtonschen Mechanik

Wir wollen zwei abschließende Bemerkungen nachtragen. Zum einen ist dies eine Überlegung, wie der Lagrangesche Formalismus mit dem Newtonschen verbunden ist. Interessant ist nämlich zu bemerken, was mit der Lagrangeschen Methode zweiter Art passiert, wenn gar keine Zwangskräfte vorliegen. Dann haben wir für n Teilchen $f = 3n$ Freiheitsgrade. Wir können für die die kartesischen Koordinaten wählen und haben so die Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 - U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n). \tag{6.40}$$

Nun sind

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} = \frac{d}{dt} m_j \dot{\mathbf{r}}_j = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j \tag{6.41}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_j} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_j}. \tag{6.42}$$

Hier haben wir in etwas Jargon partielle Ableitungen nach Vektoren formuliert, was aber nichts anderes meint, als dass wir mehrere Gleichungen in einer formulieren. Die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_j} = 0 \tag{6.43}$$

sind also gerade identisch mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j + \nabla_j U = 0. \tag{6.44}$$

Dies ist wenig überraschend, da das Problem ja genau das der Newtonschen Mechanik ist. Die Lagrangesche Mechanik kann so dennoch als allgemeine Methode aufgefasst werden, die Bewegungsgleichung bei frei wählbaren Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ aufzustellen. Frei wählbar" heißt hier, dass alle Koordinaten legitim sind, so lange sie $A(t)$ parametrisieren.

6.3.2 Koordinatentransformationen

Dies bringt uns zu unserem zweiten Nachtrag, der die Frage stellt, was passiert, wenn wir von einem verallgemeinerten Koordinatensatz zu einem neuen übergehen. Geht man über von einem Koordinatensatz zu $(q_1, \ldots, q_f)$ zu $(v_1, \ldots, v_f)$, so dass

$$q_j = q_j(v_1, \ldots, v_f, t) \tag{6.45}$$

für $j = 1, \ldots, f$, und so

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial q_j}{\partial v_k} \dot{v}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t} \tag{6.46}$$

ist, so findet man die neue Lagrangefunktion

$$(v_1, \dots, v_f, \dot{v}_1, \dots, \dot{v}_f, t) \mapsto V(v_1, \dots, v_f, \dot{v}_1, \dots, \dot{v}_f, t). \tag{6.47}$$

Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{v}_j} - \frac{\partial V}{\partial v_j} = 0 \tag{6.48}$$

haben den gleichen physikalischen Gehalt wie die ursprünglichen und nehmen auch die gleiche Form an.