Analytische Mechanik (20113401)

Vorlesender: Jens Eisert.

Kapitel 9: Schwingungen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 9

Schwingungen

9.1 Vorbemerkungen

Schwingungen haben wir als harmonische Schwingungen schon mehrfach kennengelernt. In der Tat ist der harmonische Oszillator wohl das paradigmatischste aller Systeme der Physik, eines, das eine Vielzahl von Problemen beschreibt – übrigens auch in der Quantenmechanik, wo es etwa auch Licht modelliert – und gleichermaßen exakt lösbar ist. Über das einfache Pendel gibt es inzwischen so viel nicht mehr zu sagen, und wir haben auch komplizierte Pendel angesehen, die Zwangsbedingungen unterworfen sind. Aber was, wenn *viele harmonische Systeme gekoppelt* sind? In der Tat können wir solche Systeme immer noch in aller Allgemeinheit lösen, wir müssen nur geeignete Strategien finden, sie zu entkoppeln. Dies werden wir tatsächlich mit kanonischen Transformationen machen, wie wir sie schon kennengelernt haben, auf eine frische Weise.

9.2 Gekoppelte harmonische Systeme

9.2.1 Linearisierung von Gleichungen

Es gibt letztlich zweierlei Arten von gekoppelten harmonischen Systemen: Solche, die tatsächlich gekoppelte harmonische Systeme sind. Und solche, die es zu guter Approximation sind. Dies ist ernster gemeint, als es klingt. Wir stellen uns ein Potential vor

$$\mathbf{q} \mapsto U(\mathbf{q}) \tag{9.1}$$

mit $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^f$. Ein solches Potential mag *Gleichgewichtspunkte* haben, in der Tat ist dies in aller Regel der Fall. Ein Gleichgewichtspunkt ist einer $\mathbf{q}_0$, bei dem mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0,\ \dot{\mathbf{q}}(0) = 0 \tag{9.2}$$

gelten wird, dass $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0$ für alle $t \geq 0$. Man muss kurz auf die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen starren, um zu sehen, dass dies gelten wird, wenn

$$\frac{\partial U}{\partial q_j}|_{q_j = q_j(0)} = 0 \tag{9.3}$$

ist für alle $j = 1, \dots, f$. Also sei $\mathbf{q_0} = \mathbf{q}(0)$ ein solcher Gleichgewichtspunkt. Was passiert in seiner Umgebung? Wir schreiben

$$q_j = q_j(0) + \eta_j \tag{9.4}$$

und finden so

$$\begin{aligned} U(q_1, \dots, q_f) &= U(q_1(0), \dots, q_f(0)) + \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial U}{\partial q_j}|_{\mathbf{q}(0)} \eta_j & (9.5)\\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{f} \frac{\partial U}{\partial q_j \partial q_k}|_{\mathbf{q}(0)} \eta_j \eta_k + O(\|\eta\|^3) \\ &= U(q_1(0), \dots, q_f(0)) + \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial U}{\partial q_j}|_{\mathbf{q}(0)} \eta_j & (9.6)\\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{f} K_{j,k} \eta_j \eta_k + O(\|\eta\|^3) & (9.7) \end{aligned}$$

mit

$$K_{j,k} := \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{f} K_{j,k} \eta_j \eta_k. \tag{9.8}$$

Wir erhalten so also ein harmonisches Problem. Wenn für *kleine Schwingungen* die Terme höherer Ordnung vernachlässigbar sind, haben wir wieder ein lineares oder auch harmonisches Problem. Ebenso gilt ja für die kinetische Energie

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{f} M_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{f} M_{j,k} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k + O(\|\eta\|^3). \tag{9.9}$$

Also wiederum eine quadratische Form, mit

$$M = \mathbb{1}. \tag{9.10}$$

Es gilt auch $M_{j,k} = M_{k,j}$, also ist diese Matrix symmetrisch, wie auch K.

9.2.2 Intrinsisch harmonische Probleme

Wir erhalten so also eine Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{f} \left(M_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k - K_{j,k} q_j q_k \right), \tag{9.11}$$

die quadratisch in den verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen ist. Der andere Fall ist der, dass die echte Lagrangegleichung schon durch eine solche Gleichung bestimmt ist. Das ist nicht ganz ernst gemeint – in aller Regel wird zu einem Grade eine Näherung vorliegen, um auf solche Gleichungen zu kommen. Tatsächlich gibt es aber Systeme, die zu erheblicher Genauigkeit so beschrieben sind. In der Quantenmechanik – und hier sind klassische und Quantenmechanik analog – ist Licht etwa durch solche Gleichungen beschrieben. Die passende Bewegungsgleichung ist eine *gekoppelte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{f}(M_{j,k}\ddot{q}_k + K_{j,k}q_k) = 0. \tag{9.12}$$

In jedem Fall wollen wir uns nun an ihre Lösung machen.

9.3 Mathematisches Intermezzo

9.3.1 Differentialgleichungen zweiter Ordnung einer Variabler

Eine homogene lineare Differentialgleichung einer Variabler zweiter Ordnung ist von der Form

$$\ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0. \tag{9.13}$$

Homogen meint, dass die rechte Seite der Differentialgleichung verschwindet. Eine erste Einsicht zu den Lösungen solcher Differentialgleichungen ist die folgende: Die Lösungen bilden einen zweidimensionalen reellen Vektorraum. Das meint, dass wenn $t \mapsto x^{(0)}(t)$ und $t \mapsto x^{(1)}(t)$ Lösungen sind, wird das auch für jede Überlagerung

$$\alpha x^{(0)}(t) + \beta x^{(1)}(t) \tag{9.14}$$

gelten, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dass dies in der Tat der Fall ist, kann man leicht sehen, indem man $x^{(0)}(0) = 1$ und $\dot{x}^{(0)}(0) = 0$ wählt, sowie $x^{(1)}(0) = 0$ und $\dot{x}^{(1)}(0) = 1$, und so bemerkt, dass man so eine Basis dieses Vektorraumes gefunden hat.

9.3.2 Multivariate lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Das gleiche Vorgehen ergibt auch viel Sinn für Differentialgleichungen vieler Variabler. Weil wir uns hier nicht festlegen, dass dies wirklich kartesische Koordinaten sind, schreiben wir $t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^m$. Eine allgemeine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung eines Systems mit m Freiheitsgraden ist

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + A(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{x}(t) = 0, \tag{9.15}$$

wobei hier $A(t), B(t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sind. In der Tat erfüllen die Lösungen wieder ein Superpositionsprinzip: Mit je zwei Lösungen ist auch deren Überlagerung eine Lösung. Die Lösungen bilden einen $2m$-dimensionalen reellen Vektorraum. Dies sieht man leicht, indem man eine passende Basis konstruiert. Dies heißt auch, dass sich jede

Lösung durch lineare Überlagerung aus einem Satz von Basisfunktionen gewinnen lässt. Interessant ist auch die Beobachtung, dass sich lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung immer auch als Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben lassen, allerdings dann mit der doppelten Anzahl an Variablen. Offensichtlich ist

$$\ddot{\mathbf{x}} + A\dot{\mathbf{x}} + B\mathbf{x} = 0 \tag{9.16}$$

äquivalent mit dem System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{z}, & (9.17) \\ \dot{\mathbf{z}} + A\mathbf{z} + B\mathbf{x} &= 0, & (9.18) \end{aligned}$$

wobei nun $2m$ Variablen auftreten. Das gleiche Vorgehen ist auch bei Differentialgleichungen höherer Ordnung möglich.

9.3.3 Inhomogene Differentialgleichungen

Bisher haben wir homogene Differentialgleichungen betrachtet, also solche ohne "rechte Seite". Oft ist es aber so, dass Systeme getrieben sind, und so weitere äußere Kräfte vorliegen. m-dimensionale Systeme, die von solchen Kräften $t \mapsto f_j(t)$ für $j = 1, \ldots, m$ getrieben werden, erfüllen so die Bewegungsgleichungen

$$\sum_{j,k=1}^{m} (M_{j,k}\ddot{x}_k + K_{j,k}x_k) = f_j(t), \tag{9.19}$$

wobei wir den unwesentlichen Faktor von $1/2$ nicht weiter berücksichtigt und in den Matrizen absorbiert haben. Diese Systeme sind also von der Form

$$L\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \tag{9.20}$$

wobei $\mathbf{f}$ der Vektor der Funktionen ist und L ein *linearer Differentialoperator*. Wenn diese Notation iritiert: Sie meint genau das, was in der Zeile darüber steht.

Allgemeine Lösungen: Wenn $t \mapsto \mathbf{x}^{(0)}(t)$ eine Lösung von

$$L\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{9.21}$$

ist, so ist jede andere Lösung $t \mapsto \mathbf{x}^{(1)}(t)$ von der Form

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \mathbf{u}(t), \tag{9.22}$$

wobei $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ die zugehörige homogene Gleichung

$$L\mathbf{u}(t) = 0 \tag{9.23}$$

löst.

Dieser Satz ist sehr wichtig. Man kennt also alle Lösungen, indem man zunächst die allgemeine homogene Gleichung löst. Rät man dann noch eine Lösung des inhomogenen Problems, so hat man gleich alle gefunden. Der Beweis der Aussage ist auch ganz einfach. Es ist ja ganz offensichtlich

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + (\mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}^{(0)}(t)), \tag{9.24}$$

weil wir einen Term addiert und gleich wieder subtrahiert haben, und

$$L(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) = L\mathbf{x}^{(1)} - L\mathbf{x}^{(0)}, \tag{9.25}$$

also ist $t \mapsto \mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}^{(0)}(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Umgekehrt ist mit $L\mathbf{u} = 0$ und $L\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{f}$ auch $L(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{u}) = \mathbf{f}$. Dies mag zwar nicht sehr tiefsinnig sein, ist aber sehr praktisch, etwa wenn wir ein getriebenes Pendel ansehen wollen.

9.4 Homogene lineare Systeme mit nur einem Freiheitsgrad

9.4.1 Allgemeine Lösung

Um in Form zu kommen, wollen wir uns zunächst Systeme mit einem Freiheitsgrad ansehen. Das ergibt viel Sinn, da wir sehen werden, dass der Schritt von einem Freiheitsgrad zu vielen ein einfacher ist. Wir untersuchen so also die Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{9.26}$$

für $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$. Hierbei sind $\xi, \omega_0 > 0$ zwei Konstanten, deren Bedeutung gleich klar werden wird: Es ist nämlich ω_0 die Frequenz des Oszillators, während ξ die Reibung manifestiert. Daher ergibt sich auch, dass beide Konstanten nicht negativ sind. Es wid sich zeigen, dass das Problem erheblich einfacher wird, wenn man es über komplexen Zahlen betrachtet, $z \in \mathbb{C}$. Wir schreiben Real- und Imaginärteil als $z = a + ib$. Im Herzen unseres Arguments wird die *komplexe Exponentialfunktion* stehen, die wir als

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{9.27}$$

kennen. Sie erfüllt die Eigenschaften, die wir kennen, also insbesondere

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \tag{9.28}$$

für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b), \tag{9.29}$$

für $b \in \mathbb{R}$, $(e^{ib})^* = e^{-ib}$ und, wichtig für das folgende,

$$\frac{d}{dt} e^{zt} = z e^{zt} \tag{9.30}$$

für $t \geq 0$ und $z \in \mathbb{C}$. Das ist wichtig, weil Zeitableitungen einfach weitere Potenzen von z aufsammeln. Die zentrale Idee der Lösung ist, die Differentialgleichung als eine für eine komplexe Größe aufzufassen. Da die Gleichung linear ist, ist dies ohne weiteres möglich. Es gilt auch weiter das Superpositionsprinzip. Also ist mit zwei Lösungen $t \mapsto z^{(0)} \in \mathbb{C}$ und $t \mapsto z^{(1)} \in \mathbb{C}$ auch für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$z(t) = \alpha z^{(0)} + \beta z^{(1)} \tag{9.31}$$

eine Lösung der Gleichung (9.26). Ein kurzer Moment des Nachdenkens zeigt auch, dass $t \mapsto z^*(t)$ eine Lösung ist. Somit ist auch

$$u(t) = \frac{1}{2}(z(t) + z^*(t)) \tag{9.32}$$

eine reellwertige Lösung – dies ist ja gerade der *Realteil* von $z(t)$ – also die, die wir suchen. Der Umweg über die komplexe Ebene ist also nur ein "Rechentrick", allerdings ein recht mächtiger. Dies war schon der erste Schritt unseres Ansatzes.

Der zweite Schritt ist der *Exponentialansatz*. Nun macht sich die einfache komplexe Exponentialfunktion bezahlt. Wir schreiben

$$z(t) = e^{\lambda t} \tag{9.33}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$, das noch zu bestimmen ist, so dass die Differentialgleichung gelöst wird. Wenn wir diesen Ansatz einsetzen, erhalten wir

$$\lambda^2 + 2\xi\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{9.34}$$

So wird die Idee deutlich: Wir erhalten einfach Potenzen von λ durch die Ableitungen in der Zeit. Für unseren Fall finden wir die Lösung aus der vertrauten Lösungsformel

$$\lambda_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega_0^2}. \tag{9.35}$$

Nun sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

- Der Fall $\xi > \omega_0$ ist der der *starken Dämpfung*. Dann gibt es zwei reelle negative Nullstellen, und die allgemeinste Lösung

  $$z(t) = e^{-\xi t}(\alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t}) \tag{9.36}$$

  mit

  $$\omega^2 = \xi^2 - \omega_0^2 \tag{9.37}$$

  klingt mit $t \to \infty$ exponentiell ab. Daran hilft auch die Realteilbildung nicht.

- Der Fall $0 < \xi < \omega_0$ ist der der *schwachen Dämpfung*. Die allgemeinste Lösung ist so in komplexer Notation

  $$z(t) = e^{-\xi t}(\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}), \tag{9.38}$$

  mit

  $$\omega^2 = \omega_0^2 - \xi^2. \tag{9.39}$$

In reeller Schreibweise ist das

$$x(t) = e^{-\xi t}(\alpha' \cos(\omega t) + \beta' \sin(\omega t)), \tag{9.40}$$

nun mit $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$. Dies ist eine oszillatorische Bewegung, allerdings eine gedämpfte. Die Schwingung klingt wiederum mit $t \to \infty$ ab. Interessant ist dabei, dass die Frequenz eine andere ist: Nicht mehr ω_0, sondern ω, eine durch die Dämpfung veränderte. Man spricht auch von einer renormierten Frequenz, aus Gründen, die zu erklären hier zu weit gehen würden.

- Es gibt noch den kuriosen Fall $\xi = \omega_0$ als *aperiodischer Grenzfall*. Da liefert der Exponentialansatz nur eine linear unabhängige Lösung. Die allgemeinste komplexe Lösung ist von der Form

$$z(t) = e^{-\xi t}(\alpha + \beta t). \tag{9.41}$$

9.4.2 Ein Beispiel: Das Pendel!

Das Pendel haben wir als Beispiel so liebgewonnen, dass wir uns es wieder vorknöpfen wollen. Für ein ebenes Pendel lautet die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta). \tag{9.42}$$

Die Gleichgewichtslage ist offensichtlich bei $\theta = 0$, und wir können ganz wie oben erklärt eine lineare Entwicklung vornehmen. Für das Potential erhalten wir so

$$V(\theta) = mgl\frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4), \tag{9.43}$$

wie man sich leicht überzeugt. In obiger Notation sind so $K = mgl$ und $M = ml^2$. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0. \tag{9.44}$$

Dies ist selbstredend keine Überraschung, wir wollen ja nur den Ansatz üben. Mit

$$\theta(t) = e^{i\omega t} \tag{9.45}$$

folgt

$$-\omega^2 + \frac{g}{l} = 0, \tag{9.46}$$

was meint, dass

$$\omega^2 = \frac{g}{l}. \tag{9.47}$$

Also ist die allgemeinste reelle Lösung der Bewegungsgleichung von der Form

$$\theta(t) = \mathrm{Re}(\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}) \tag{9.48}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, die gewählt werden können, um die Anfangsbedingungen zu inkorporieren.

9.5 Homogene lineare Systeme mit vielen Freiheitsgraden

9.5.1 Allgemeine Lösung

Wir wollen uns nun der Situation von vielen Freiheitsgraden zuwenden. Die zu lösende Gleichung kennen wir ja schon. Dies ist

$$\sum_{k=1}^{f}(M_{j,k}\ddot{q}_k + K_{j,k}q_k) = 0, \tag{9.49}$$

für $j = 1, \ldots, f$. Beide Matrizen sind symmetrisch nach Konstruktion

$$M = M^T,\, K = K^T, \tag{9.50}$$

und es ist $M \geq 0$ (was heißt, dass alle reellen Eigenwerte nichtnegativ sind). Vektoriell geschrieben ist dies

$$M\ddot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = 0. \tag{9.51}$$

Tatsächlich können wir zur Lösung so vorgehen, wie oben beschrieben. Wir können die Differenzialgleichung wieder als Differentialgleichung mit Werten im Komplexen auffassen, nun also in $\mathbb{C}^f$. Wir gehen also wieder den Umweg über das Komplexe, um die eigentliche Lösung als den Realteil zu identifizieren.

Dann machen wir, wiederum ganz analog wie oben, einen Exponentialansatz. Wir setzen also an

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}e^{i\omega t},\, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^f. \tag{9.52}$$

Dies führt zu

$$(K - \omega^2 M)\mathbf{v} = 0. \tag{9.53}$$

Diese Gleichung kann nur dann eine Lösung haben, für die $\mathbf{v} \neq 0$ ist, wenn $K - \omega^2 M$ nicht injektiv ist. Dies wieder um meint, dass

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \tag{9.54}$$

ist. Dies ist ein Polynom f-ter Ordnung in ω^2. Die möglichen Werte der Frequenzen ω^2 müssen also Nullstellen des Polynoms $\det(K - \omega^2 M) = 0$ sein. Seien ω_j^2, $j = 1, \ldots, f$, diese Nullstellen und $\mathbf{v}^{(j)}$ die verallgemeinerten Eigenvektoren

$$\left(K - \omega_j^2 M\right)\mathbf{v}^{(j)} = 0. \tag{9.55}$$

In der Tat findet man, weil $K = K^T$ und $M = M^T$ gilt, dass ω_j^2 reell ist für alle $j = 1, \ldots, f$. Ebenso kann man $\mathbf{v}^{(j)} \in \mathbb{R}^f$ wählen, sie sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^f$. Ersteres ist tatsächlich sehr leicht zu sehen. Um zweiteres zu zeigen, muss man sich vergegenwärtigen, dass sowohl Realteil und Imaginärteil Eigenvektoren sind. Die Lösungen

$$\mathbf{q}^{(j)}(t) = v^{(j)}e^{i\omega_j t} \tag{9.56}$$

sind die *Eigenschwingungen* des Systems, die Frequenzen ω_j heißen die *Eigenfrequenzen*. Da der Lösungsraum ein Vektorraum ist, sind beliebige Überlagerungen dieser Eigenschwingungen möglich. Die ω_j^2 sind reell, müssen aber nicht positiv sein. Sind sie es doch, also gilt

$$\omega_j^2 > 0 \tag{9.57}$$

für alle $j = 1, \dots, f$, so ist die allgemeinste Lösung eine Überlagerung

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^{f} (a_j e^{i\omega_j t} + b_j e^{-i\omega_j t}) \mathbf{v}^{(j)}, \tag{9.58}$$

mit $a_j, b_j \in \mathbb{C}$. Diese Konstanten können angepasst werden, um die Anfangsbedingungen zu respektieren. Wenn ein oder mehrere Frequenzen $\omega_j = 0$ sind, dann entsprechen diesen Translationen.

9.5.2 Gekoppelte Pendel

Ein schönes Beispiel ist das zweiter gekoppelter Pendel. Es sollte aber klar sein, dass wir mit dieser Technik beliebige gekoppelte Probleme ansehen können. Anhand dieses Problems ist das allgemeine Vorgehen allerdings schon recht klar. Wenn $D > 0$ die Federkraft der gekoppelten Pendel beschreibt, so lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) - \frac{1}{2} m g l (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{2} D l^2 (\phi_1 - \phi_2)^2. \tag{9.59}$$

Die ersten beiden Terme sind einfach die Terme, wie wir sie aus dem ungekoppelten Problem kennen. Der letzte Term umfasst die Kopplung der beiden Pendel mit Federkonstante $D > 0$. Übrigens haben wir hier schon angenommen, dass die Auslenkungen klein sind, haben also keinen Cosinus in der Lagrange-Funktion, sondern eben nur den harmonischen Term. Die Bewegungsgleichungen sind so also

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{g}{l}\phi_1 + \frac{D}{m}(\phi_1 - \phi_2) = 0, \tag{9.60}$$

$$\ddot{\phi}_2 + \frac{g}{l}\phi_2 + \frac{D}{m}(\phi_2 - \phi_1) = 0. \tag{9.61}$$

In Matrixform lautet dies

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \tag{9.62}$$

Wiederum können wir den Exponentialansatz wählen

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \tag{9.63}$$

und erhalten die Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{9.64}$$

Um die Eigenfrequenzen zu finden, müssen wir die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} = \omega^4 - 2\omega^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m}\right) + \left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m}\right)^2 - \frac{D^2}{m^2} = 0 \tag{9.65}$$

lösen. Es gibt zwei Lösungen. Dies sind einerseits

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \tag{9.66}$$

mit dem Eigenvektor

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9.67}$$

Die andere Eigenfrequenz ist

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{D}{m} \tag{9.68}$$

mit

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{9.69}$$

Wiederum haben wir einen Vektorraum, und so lautet im Komplexen die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{i\omega_1 t} + b_1 e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} + b_2 e^{-i\omega_2 t} \\ a_1 e^{i\omega_1 t} + b_1 e^{-i\omega_1 t} - a_2 e^{i\omega_2 t} - b_2 e^{-i\omega_2 t} \end{pmatrix}, \tag{9.70}$$

wobei wie oben der Realteil gebildet werden kann. Es ist klar, dass es zwei Eigenschwingungen gibt: Einerseits

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm i\omega_1 t}, \tag{9.71}$$

wenn also die Pendel gleichsinnig schwingen mit $\phi_1 = \phi_2$. Dies ist exakt die Bewegung, die wir auch von einem einzigen Pendel kennen. Die beiden Pendel sehen die Kopplung so gar nicht, und die Frequenzen der Schwingung sind auch unverändert. Bei

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\pm i\omega_2 t} \tag{9.72}$$

schwinden die Pendel gegensinnig mit $\phi_1 = -\phi_2$. Natürlich, man kann die Vektorraumeigenschaft gar nicht genug betonen, sind beliebige Überlagerungen möglich. Im Technikmuseum in Berlin kann man sich tatsächlich in solche gekoppelten Pendel reinsetzen. Es ist klar, dass man bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden recht komplizierte Eigenschwingungen haben kann, und deren Anzahl wächst linear in der Systemgröße.

9.5.3 Getriebene Pendel

Nun haben wir verstanden, wie wir beliebige gekoppelte Probleme lösen und dementsprechend "entkoppeln" können. Dies meint, wir können beliebige homogene Probleme lösen. Eines fehlt aber noch: Wie antwortet ein System auf ein äußeres Treiben? Wir haben bereits gesehen, dass wir zur Lösung des inhomogenen Problems alle Lösungen des homogenen Problems brauchen, und eine Lösung des inhomogenen. Wir wollen einen besonderen Schwerpunkt auf das Problem eines Freiheitsgrads legen, werden aber rasch sehen, dass wir so auch beliebige getriebene gekoppelte Pendel betrachten können. Wir gehen von einer harmonischen Kraft auf, aber auch das ist keine allzu einschränkende Annahme. Die inhomogene Differentialgleichung lautet, die wir uns ansehen werden, lautet also

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = c\cos(\omega t) \tag{9.73}$$

mit einer Konstante $c > 0$. Hier sind wie vorher auch $\xi, \omega_0 > 0$. Es gibt aber eine weitere Frequenz ω, die des Treibens. Wir können unsere bisherigen Strategien aber gut verwenden. In einem ersten Schritt ist klar, dass es ausreicht, die komplexe Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) + 2\xi\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = e^{i\omega t} \tag{9.74}$$

mit $\omega \geq 0$ zu lösen, weil $c\mathrm{re}(z(t))$ eine Lösung von Gleichung (9.73) ist. Wir wählen wieder den Exponentialansatz

$$z^{(0)} = Ae^{i\omega t}, \tag{9.75}$$

mit $A \in \mathbb{C}$. Einsetzen liefert

$$A(-\omega^2 + 2i\xi\omega + \omega_0^2) = 1. \tag{9.76}$$

Dies ergibt die spezielle Lösung (also meint, die spezielle Lösung des inhomogenen Problems)

$$z^{(0)}(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega} e^{i\omega t}. \tag{9.77}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich so nach den obigen Einsichten durch Addition der homogenen Gleichung. Da aber die Lösungen der homogenen Gleichung, die wir fanden, alle mit $t \to \infty$ nach 0 abklingen, strebt jede Lösung für große Zeiten zur speziellen Lösung. Wegen der Dämpfung vergisst das System also die Anfangsbedingung. Der Prozess der Konvergenz zur speziellen Lösung ist der *Einschwingvorgang*. Indem wir $A = |A|e^{i\delta}$, finden wir, dass die spezielle Lösung

$$c\mathrm{re}(z^{(0)}(t)) = c|A|\cos(\omega t + \delta) \tag{9.78}$$

ist. Hier ist

$$|A|^2 = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\omega^2}, \tag{9.79}$$

und

$$\tan\delta = \frac{2\xi\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{9.80}$$

$|A|^2$ hat ein Maximum bei $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\xi^2$. Dieses Maximum entspricht der Resonanz. Für schwache Dämpfung ist

$$|A|^2 = \frac{1}{4\omega_0^2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \xi^2}. \tag{9.81}$$

Das heisst, wenn die treibende Frequenz ω nahe der Frequenz des Oszillators ω_0 ist, nimmt die Amplitude ein Maximum an. Dieses Phänomen nennt man *Resonanz*. Dieses Maximum ist um so ausgeprägter und auch schmaler, um so kleiner die Dämpfung ist. Dann kann die Amplitude tatsächlich katastrophal groß werden, wie man auch etwa bei Resonanzen von Brücken kennt. Spannend ist auch das Verhalten von δ. δ variiert zwischen 0 und $-\pi$. In Phase ist die erzwungene Schwingung immer hinter der erzwingenden Kraft, wobei für $\omega \to 0$ die Phasendifferenz nach Null strebt und für $\omega \to \infty$ den maximalen Wert $-\pi$ annimmt.

9.5.4 Abschließende Bemerkungen

Allgemeine treibende Kräfte lassen sich ähnlich lösen, indem man anerkennt, dass ich solche Kräfte in einer Fourierreihe entwickeln lassen. So haben wir

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\dot{q}(t) + \omega_0^2(t)q(t) = \sum_k c_k e^{i\omega_k t} \tag{9.82}$$

für passende Gewichte $c_k \in \mathbb{C}$ und Frequenzen $\omega_k \in \mathbb{R}$ mit $k = 1, 2, \dots$. Vor allem können wir das Mehrdimensionale einfach wie vorher lösen, wenn wir

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + K\mathbf{q}(t) = \mathbf{c}\cos\omega t \tag{9.83}$$

vorliegen haben, nun mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^f$, für f Freiheitsgrade. Auch dann betrachtet man den komplexen Fall

$$M\ddot{\mathbf{z}}(t) + K\mathbf{z}(t) = \mathbf{c}e^{i\omega t}, \tag{9.84}$$

mit $t \mapsto \mathbf{z}(t) \in \mathbb{C}^f$, und geht vor wie oben. Es ist interessant, zu beobachten, dass eine solche Entkopplung immer funktioniert. Tatsächlich ist da eine kanonische Transformation am Werk, die zu neuen Koordinaten übergeht, in denen das System entkoppelt. Das ist ein Vorgehen, das auch in der Quantenmechanik möglich ist.