Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2021

Klausur
12.07.2021 um 14:15

---

1. **Kurze Fragen - Kurze Anworten** [?? Punkte]

   Die maximale Punktzahl für die folgenden Fragen kann ohne Rechnungen und mit kurzen Begründungen (z.B. 1–3 Sätze) erreicht werden.

   a) Diskutieren Sie qualitativ die Planetenbewegung als Zweikörperproblem. Auf welchen geometrischen Bahnen bewegen sich Sonne und Planet? *[2 pt]*

   b) Definieren Sie den Begriff Scheinkraft. Welche der folgenden Kräfte sind Scheinkräfte? *[3 pt]*

   (Ja=Scheinkraft/Nein=keine Scheinkraft; keine Begründung nötig.)

   (i) Gravitationskraft
   (ii) Zentrifugalkraft
   (iii) Kontaktkräfte zwischen zwei stoßenden Körpern
   (iv) Coriolis-Kraft
   (v) Coulomb-Kräfte zwischen zwei Elektronen

   c) Was besagt das d'Alembertsche Prinzip über Zwangskräfte? *[2 pt]*

   d) Erklären Sie, was man unter kanonischen Transformationen versteht. *[2 pt]*

   e) Betrachten Sie eine Masse m in drei Dimensionen im Potenzial $V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}k|\boldsymbol{r}|^2$ (mit $k > 0$). Welche der folgenden Größen sind stets erhalten? *[4 pt]*

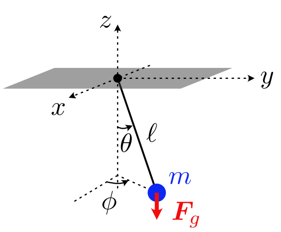
   Falls eine Größe erhalten ist, nennen Sie die Symmetrie, die mit der Größe über das Noether Theorem verbunden ist. Falls eine Größe nicht erhalten ist, begründen Sie dies, z.B. indem Sie ein Gegenbeispiel kurz beschreiben.

   (i) Die totale Energie $T + V$.
   (ii) Der Impuls $\boldsymbol{p}$.
   (iii) Die Radialkomponente des Impulses, $\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \boldsymbol{p}$.
   (iv) Der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$.
   (v) Die Lagrangefunktion.
   (vi) Die Hamiltonfunktion.

   f) Betrachten Sie eine kontinuierliche Transformation der verallgemeinerten Koordinaten $\boldsymbol{q}$ eines Systems mit Lagrangefunktion $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$. Können die Lösungen der Bewegungsgleichungen die selben bleiben, selbst wenn sich L unter dieser Transformation ändert? (mit kurzer Begründung) *[2 pt]*

2. **Pendel in 3D** [?? Punkte]

   Eine Punktmasse m ist durch eine masselose starre Stange der Länge ℓ am Koordinatenursprung befestigt und kann frei im 3-dimensionalen Raum schwingen. Es wirkt die Gewichtskraft in negativer z-Richtung $\boldsymbol{F}_g = -mg\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$.



   Hinweise:
   Kugelkoordinaten mit θ von negativer z-Achse gemessen:

$$x = r\cos\phi\sin\theta\ ; \qquad y = r\sin\phi\sin\theta\ ; \qquad z = -r\cos\theta\ ;$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \begin{pmatrix}\cos\phi\sin\theta\\ \sin\phi\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}; \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix}; \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \begin{pmatrix}\cos\phi\cos\theta\\ \sin\phi\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix};$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = \dot\phi\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \dot\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\ .$$

   a) Bestimmen Sie die Zahl der Freiheitsgrade und begründen Sie Ihre Antwort. *[1 pt]*

   b) Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion auf. *[3 pt]*

c) Die Lagrangefunktion ist invariant unter einer beliebigen Rotation um die z-Achse. Schreiben Sie die Transformation der generalisierten Koordinaten auf und finden Sie die dazugehörende Erhaltungsgröße. *[3 pt]*

d) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen gegeben sind durch *[2 pt]*

$$\ddot{\phi}\sin^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = 0\ ;$$
$$\ell\ddot{\theta} - \ell\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + g\sin\theta = 0\ .$$

e) Anschaulich wissen wir, dass das Pendel in einer ebenen Kreisbewegung schwingen kann, bei der also θ konstant ist. Betrachten Sie im Folgenden eine Trajektorie, die durch $\phi(t) = \omega t$ und $\theta(t) = \theta_0$ gegeben ist. Zeigen Sie wie ω und θ_0 voneinander abhängen müssen, damit die Trajektorie eine Lösung der Bewegungsgleichungen darstellt. *[2 pt]*

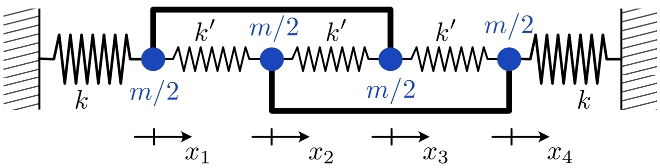
Nehmen Sie jetzt an, dass ein Mechanismus am Punkt der Befestigung des Pendels aufgebaut wird, sodass das Pendel mit einer konstante Radialgeschwindigkeit ω getrieben wird, d.h. $\phi(t) = \omega t$. Das Pendel darf sich immer noch frei in der θ-Richtung bewegen.

Hinweis. Sie dürfen die oben gefundene Bewegungsgleichung für ϕ weglassen und stattdessen $\phi(t) = \omega t$ nehmen, und dann nur die Bewegungsgleichung für θ betrachten.

f) Der Wert θ_0, der in **??** gefunden wurde, ist ein Gleichgewichtspunkt des neuen, getriebenen Systems. Geben Sie jetzt alle Gleichgewichtswerte für θ an. Bestimmen Sie für jeden Gleichgewichtspunkt $\theta_0^{(i)}$, ob die Lösung $\theta(t) = \theta_0^{(i)}$ stabil oder instabil ist, und finden Sie die Oszillationsfrequenz für kleine Auslenkungen in den stabilen Fällen. *[4 pt]*

3. **Federn und Erhaltungsgröße** [**??** Punkte]

Betrachten Sie das folgende ein-dimensionale System mit vier identischen Massen der Masse $m/2$, zwei Federn mit Federkonstante k, und drei Federn mit Federkonstante k'. Zwei masselose steife Stangen verbinden die erste mit der dritten Masse und die zweite mit der vierten Masse:



a) Wählen Sie geeignete unabhängige Freiheitsgrade, bestimmen Sie die dazugehörenden verallgemeinerten Impulse, und stellen Sie die Hamiltonfunktion für dieses System auf. *[4 pt]*

b) Zeigen Sie, dass die Größe *[4 pt]*

$$E_+ = \frac{1}{4m}\Big(m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2\Big)^2 + \frac{k}{4}\Big(x_1 + x_2\Big)^2$$

eine Erhaltungsgröße ist.