Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2021

Klausur
12.07.2021 um 14:15

---

1. **Kurze Fragen - Kurze Anworten** $[2+3+2+2+4+2=15$ Punkte$]$

   Die maximale Punktzahl für die folgenden Fragen kann ohne Rechnungen und mit kurzen Begründungen (z.B. 1–3 Sätze) erreicht werden.

   a) Diskutieren Sie qualitativ die Planetenbewegung als Zweikörperproblem. Auf welchen geometrischen Bahnen bewegen sich Sonne und Planet? *[2 pt]*

   Lösung: Because the potential only depends on the relative position of the two bodies, the movement can be decomposed into a movement of the center of mass and the relative movement of the two bodies. For a fixed angular momentum (which is conserved), the relative movement is equivalent to a one-body problem with an effective potential, and whose solutions correspond to elliptical orbits (or a parabola or a hyperbola if the "planet" has enough energy to escape the system).

   b) Definieren Sie den Begriff Scheinkraft. Welche der folgenden Kräfte sind Scheinkräfte? *[3 pt]*

   (Ja=Scheinkraft/Nein=keine Scheinkraft; keine Begründung nötig.)

   Lösung: A fictitiuous force is a term in Newton's second law that appears as a result of expressing the acceleration vector in non-Cartesian coordinates.

   (i) Gravitationskraft **Lösung:** Nein
   (ii) Zentrifugalkraft **Lösung:** Ja
   (iii) Kontaktkräfte zwischen zwei stoßenden Körpern **Lösung:** Nein
   (iv) Coriolis-Kraft **Lösung:** Ja
   (v) Coulomb-Kräfte zwischen zwei Elektronen **Lösung:** Nein

   c) Was besagt das d'Alembertsche Prinzip über Zwangskräfte? *[2 pt]*

   Lösung: D'Alambert's principle states that a constraint force is always orthogonal to the constrained manifold.

   d) Erklären Sie, was man unter kanonischen Transformationen versteht. *[2 pt]*

   Lösung: Canonical transformations are transformations of the degrees of freedom (q_j, p_j) and of the Hamiltonian H with the property that that preserve the Poisson bracket. They are an alternative description of the system with the same physics (same physical solutions).

   Alternatively: Canonical transformations are transformations of the degrees of freedom (q_j, p_j) such that Hamilton's equations of motion are preserved (note that this definition differs subtly from the previous one).

   Alternatively: Canonical transformations are transformations of the degrees of freedom (q_j, p_j) such that the Jacobian of the transformation is a symplectic matrix.

   e) Betrachten Sie eine Masse m in drei Dimensionen im Potenzial $V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}k|\boldsymbol{r}|^2$ (mit $k > 0$). Welche der folgenden Größen sind stets erhalten? *[4 pt]*

   Falls eine Größe erhalten ist, nennen Sie die Symmetrie, die mit der Größe über das Noether Theorem verbunden ist. Falls eine Größe nicht erhalten ist, begründen Sie dies, z.B. indem Sie ein Gegenbeispiel kurz beschreiben.

   (i) Die totale Energie $T + V$.

   Lösung: Conserved. The total energy is equal to the Hamiltonian, which is a conserved because of time translation invariance of the Lagrangian.

   (ii) Der Impuls $\boldsymbol{p}$.

Lösung: Not conserved. A particle oscillating back in forth along the x axis (or in any other direction) is a counter-example.

(iii) Die Radialkomponente des Impulses, $\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \boldsymbol{p}$.

Lösung: Not conserved. Same counter-example as above.

(iv) Der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$.

Lösung: Conserved. The corresponding symmetry is that the Lagrangian is invariant under any rotations in $\mathrm{SO}(3)$.

(v) Die Lagrangefunktion.

Lösung: Not conserved. Same counter-example as above. (T and V each oscillate between being maximal and minimal, their sum being conserved. So their difference is not conserved in this oscillatory movement.)

(vi) Die Hamiltonfunktion.

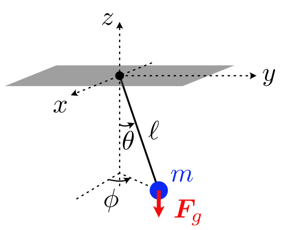
Lösung: Conserved. (Equal to the total energy.) The corresponding symmetry is the invariance of the Lagrangian under time translations.

f) Betrachten Sie eine kontinuierliche Transformation der verallgemeinerten Koordinaten $\boldsymbol{q}$ eines Systems mit Lagrangefunktion $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$. Können die Lösungen der Bewegungsgleichungen die selben bleiben, selbst wenn sich L unter dieser Transformation ändert? (mit kurzer Begründung) *[2 pt]*

Lösung: yes, if the transformation transforms L into a gauge-equivalent L (See 6.5.1)

2. **Pendel in 3D** [$1 + 3 + 3 + 2 + 2 + 4 = 15$ Punkte]

Eine Punktmasse m ist durch eine masselose starre Stange der Länge ℓ am Koordinatenursprung befestigt und kann frei im 3-dimensionalen Raum schwingen. Es wirkt die Gewichtskraft in negativer z-Richtung $\boldsymbol{F}_g = -mg\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$.



Hinweise:
Kugelkoordinaten mit θ von negativer z-Achse gemessen:

$$x = r\cos\phi\sin\theta\ ; \qquad y = r\sin\phi\sin\theta\ ; \qquad z = -r\cos\theta\ ;$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}; \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix};$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = \dot\phi\sin(\theta)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \dot\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\ .$$

a) Bestimmen Sie die Zahl der Freiheitsgrade und begründen Sie Ihre Antwort. *[1 pt]*

Lösung: In Kugelkoordinaten haben wir eine holonome Zwangsbedingung $r - \ell = 0$. Somit verbleiben 2 Freiheitsgrade.

b) Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion auf. *[3 pt]*

Lösung: Kugelkoordinaten ϕ und θ.

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + mgl\cos\theta \tag{1}$$

c) Die Lagrangefunktion ist invariant unter einer beliebigen Rotation um die z-Achse. Schreiben Sie die Transformation der generalisierten Koordinaten auf und finden Sie die dazugehörende Erhaltungsgröße. *[3 pt]*

Lösung: Rotation um die z Achse. $\phi \longmapsto \phi + \alpha$. Erhaltungsgröße

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}}_{=1} = ml^2 \dot\phi \sin^2\theta \tag{2}$$

d) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen gegeben sind durch *[2 pt]*

$$\ddot\phi \sin^2\theta + 2\dot\phi\dot\theta \sin\theta\cos\theta = 0 \; ;$$
$$\ell\ddot\theta - \ell\dot\phi^2 \sin\theta\cos\theta + g\sin\theta = 0 \; .$$

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = ml^2(\ddot\phi\sin^2\theta + 2\dot\phi\dot\theta\sin\theta\cos\theta) = 0 \tag{3}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml(l\ddot\theta - l\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta + g\sin\theta) = 0 \tag{4}$$

e) Anschaulich wissen wir, dass das Pendel in einer ebenen Kreisbewegung schwingen kann, bei der also θ konstant ist. Betrachten Sie im Folgenden eine Trajektorie, die durch $\phi(t) = \omega t$ und $\theta(t) = \theta_0$ gegeben ist. Zeigen Sie wie ω und θ_0 voneinander abhängen müssen, damit die Trajektorie eine Lösung der Bewegungsgleichungen darstellt. *[2 pt]*

Lösung: Die erste Bewegungsgleichung ist trivial $0 = 0$. Die zweite Bewegungsgleichung gibt uns den Zusammenhang:

$$l\omega^2 \sin\theta\cos\theta = g\sin\theta \tag{5}$$

Das heißt, $\omega(\theta_0) = \sqrt{g/(l\cos\theta_0)}$.

Nehmen Sie jetzt an, dass ein Mechanismus am Punkt der Befestigung des Pendels aufgebaut wird, sodass das Pendel mit einer konstante Radialgeschwindigkeit ω getrieben wird, d.h. $\phi(t) = \omega t$. Das Pendel darf sich immer noch frei in der θ-Richtung bewegen.

Hinweis. Sie dürfen die oben gefundene Bewegungsgleichung für ϕ weglassen und stattdessen $\phi(t) = \omega t$ nehmen, und dann nur die Bewegungsgleichung für θ betrachten.

f) Der Wert θ_0, der in e) gefunden wurde, ist ein Gleichgewichtspunkt des neuen, getriebenen Systems. Geben Sie jetzt alle Gleichgewichtswerte für θ an. Bestimmen Sie für jeden Gleichgewichtspunkt $\theta_0^{(i)}$, ob die Lösung $\theta(t) = \theta_0^{(i)}$ stabil oder instabil ist, und finden Sie die Oszillationsfrequenz für kleine Auslenkungen in den stabilen Fällen. *[4 pt]*

Lösung: Aus e) wissen wir bereits, dass für Gleichgewichtspunkte gelten muss:

$$l\omega\sin\theta\cos\theta = g\sin\theta$$

oder umgeformt:

$$\sin\theta\left(\omega^2\cos\theta - \frac{g}{l}\right) = 0$$

d.h. damit $\theta(t) = \theta_0^{(i)}$ die Gleichung erfüllt muss entweder $\sin\theta = 0$ oder $\omega^2\cos\theta + \frac{g}{l} = 0$ gelten. Aus der ersten Bedingung folgen:

$$\theta_0^{(1)} = 0$$
$$\theta_0^{(2)} = \pi$$

aus der zweiten Bedingung folgt ein dritter Gleichgewichtspunkt, wenn $\omega^2 > g/l$:

$$\theta_0^{(3)} = \arccos\frac{g}{l\omega^2}$$

Wir schreiben $\theta(t) = \theta_0^{(i)} + \epsilon(t)$ und schreiben die zweite Bewegungsgleichung um zu:

$$\ddot\epsilon = \sin\left(\theta_0^{(i)} + \epsilon\right)\left[\omega^2\cos\left(\theta_0^{(i)} + \epsilon\right) - \frac{g}{l}\right]$$

- für $\theta_0^{(1)}$:

  Taylor-Näherung ergibt:

  $$\begin{aligned}\sin(0+\epsilon) &\approx \epsilon \\ \cos(0+\epsilon) &\approx 1\end{aligned}$$

  und damit:

  $$\ddot{\epsilon} = \left(\omega^2 - \frac{g}{l}\right)\epsilon$$

  Der Gleichgewichtspunkt ist für $\omega^2 > \frac{g}{l}$ instabil und für $\omega^2 > \frac{g}{l}$ stabil mit Frequenz $\sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2}$.

- für $\theta_0^{(2)}$:

  Taylor-Näherung ergibt:

  $$\begin{aligned}\sin(\pi+\epsilon) &\approx -\epsilon \\ \cos(\pi+\epsilon) &\approx -1\end{aligned}$$

  und damit:

  $$\ddot{\epsilon} = \left(\omega^2 + \frac{g}{l}\right)\epsilon$$

  Der Gleichgewichtspunkt ist immer instabil.

- für $\theta_0^{(3)}$ (existiert nur für $\omega^2 > \frac{g}{l}$):

  Taylor-Näherung ergibt:

  $$\begin{aligned}\sin(\theta_0^{(3)}+\epsilon) &\approx \sin\theta_0^{(3)} + \epsilon\frac{g}{l\omega^2} \\ \cos(\theta_0^{(3)}+\epsilon) &\approx \frac{g}{l\omega^2} + \epsilon\sin\theta_0^{(3)}\end{aligned}$$

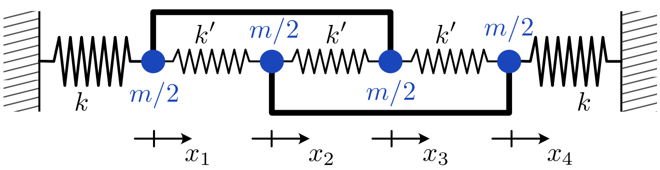
  und damit:

  $$\ddot{\epsilon} = -\omega^2\sin^2\theta_0^{(3)}\epsilon$$

  Der Gleichgewichtspunkt ist stabil mit Frequenz $\omega\sin\theta_0^{(3)}$.

3. **Federn und Erhaltungsgröße** [$4+4=8$ Punkte]

   Betrachten Sie das folgende ein-dimensionale System mit vier identischen Massen der Masse $m/2$, zwei Federn mit Federkonstante k, und drei Federn mit Federkonstante k'. Zwei masselose steife Stangen verbinden die erste mit der dritten Masse und die zweite mit der vierten Masse:



   a) Wählen Sie geeignete unabhängige Freiheitsgrade, bestimmen Sie die dazugehörenden verallgemeinerten Impulse, und stellen Sie die Hamiltonfunktion für dieses System auf. *[4 pt]*

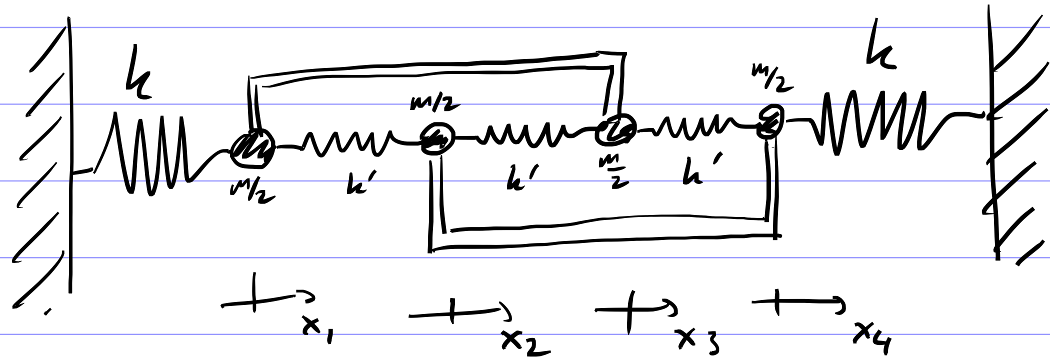
   b) Zeigen Sie, dass die Größe *[4 pt]*

   $$E_+ = \frac{1}{4m}\Big(m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2\Big)^2 + \frac{k}{4}\Big(x_1 + x_2\Big)^2$$

   eine Erhaltungsgröße ist.

Lösung: (see next page)

Solution:



a) There are two independent degrees of freedom.
Choice: x_1, x_2. Constraints: $x_3 = x_1$, $x_4 = x_2$

Let's find the Lagrangian by calculating the kinetic energy T and the potential V

$$T = \frac{1}{2}\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)$$

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_4^2 + \frac{1}{2}k'(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2}k'\underbrace{(x_3-x_2)^2}_{=(x_2-x_1)^2} + \frac{1}{2}k'\underbrace{(x_4-x_3)^2}_{=(x_2-x_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{3}{2}k'(x_2-x_1)^2 .$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = T - V .$$

Then $p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1$ and $p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2$

Because $T(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ is a quadratic form of $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}$ and $V(x_1, x_2)$ is indep. of $\dot{x}_1, \dot{x}_2$, we have

$$H = T + V = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{3}{2}k'(x_2-x_1)^2$$

b) There are at least four methods to show that E_+ is a constant of motion.

<u>Method #1</u>: compute the Poisson bracket $\{E_+, H\}$.

In terms of the variables (x_1, x_2, p_1, p_2), we have:

$$E_+ = \frac{1}{4m}(p_1+p_2)^2 + \frac{k}{4}(x_1+x_2)^2$$

We compute the partial derivatives of H and E_+ w.r.t. x_1, x_2, p_1, p_2:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} \quad (i=1,2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = kx_1 - 3k'(x_2-x_1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = kx_2 + 3k'(x_2-x_1)$$

$$\frac{\partial E_+}{\partial p_i} = \frac{1}{2m}(p_1+p_2) \quad (i=1,2)$$

$$\frac{\partial E_+}{\partial x_i} = \frac{k}{2}(x_1+x_2) \quad (i=1,2)$$

$$\rightsquigarrow \frac{dE_+}{dt} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial E_+}{\partial t}}}_{=0} + \{E_+, H\} = \sum_{i=1,2}\left(\frac{\partial E_+}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial E_+}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)$$

$$= \left(\frac{k}{2}(x_1+x_2)\frac{p_1}{m} - \frac{1}{2m}(p_1+p_2)\left(kx_1 - 3k'(x_2-x_1)\right)\right) +$$

$$\left(\frac{k}{2}(x_1+x_2)\frac{p_2}{m} - \frac{1}{2m}(p_1+p_2)\left(kx_2 + 3k'(x_2-x_1)\right)\right)$$

$$= \frac{k}{2m}(x_1+x_2)(p_1+p_2) - \frac{k}{2m}(p_1+p_2)(x_1+x_2) = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dE_+}{dt} = 0} \rightarrow E_+ \text{ is a constant of motion.}$$

Method #2: direct calculation, using Hamilton's equations.

The equations of motion are:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -kx_1 + 3k'(x_2 - x_1)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -kx_2 - 3k'(x_2 - x_1)$$

Then along a solution $x_1(t), x_2(t), p_1(t), p_2(t)$ of Hamilton's equations of motion, we have

$$\frac{dE_+}{dt} = \frac{1}{2m}(p_1 + p_2)\left(\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt}\right) + \frac{k}{2}(x_1 + x_2)\left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{2m}(p_1 + p_2)\left(-kx_1 - kx_2 + \cancel{3k'(x_2 - x_1)} - \cancel{3k'(x_2 - x_1)}\right)$$

$$+ \frac{k}{2}(x_1 + x_2)\left(\frac{p_1}{m} + \frac{p_2}{m}\right)$$

$$= -\frac{k}{2m}(p_1 + p_2)(x_1 + x_2) + \frac{k}{2m}(x_1 + x_2)(p_1 + p_2) = 0$$

$$\frac{dE_+}{dt} = 0 \longrightarrow E_+ \text{ is a constant of motion.}$$

Method #3. Identify E_+ as the energy of a normal mode.

We can expect (by inspecting the sketch) that there is a solution of the equations of motion where all masses move together, $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = x_4(t)$.

This is verified by checking that the variables

$$u_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \qquad u_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$$

diagonalize the couplings in the Hamiltonian:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{2}k'(x_2 - x_1)^2$$

$$= \frac{p_+^2 + p_-^2}{2m} + \frac{1}{2}k(u_+^2 + u_-^2) + 3k' u_-^2$$

$$p_\pm = \frac{p_1 \pm p_2}{\sqrt{2}}$$

[The transformed momenta are $p_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2)$ because

$$\dot{u}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{x}_1 \pm \dot{x}_2) = \frac{1}{m\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2) \quad \text{and}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2}m(\dot{u}_+^2 + \dot{u}_-^2) \rightarrow p_\pm = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_\pm} = m\dot{u}_\pm$$

$$\rightarrow p_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2). \quad]$$

We then see that $H = E_+ + E_-$, with

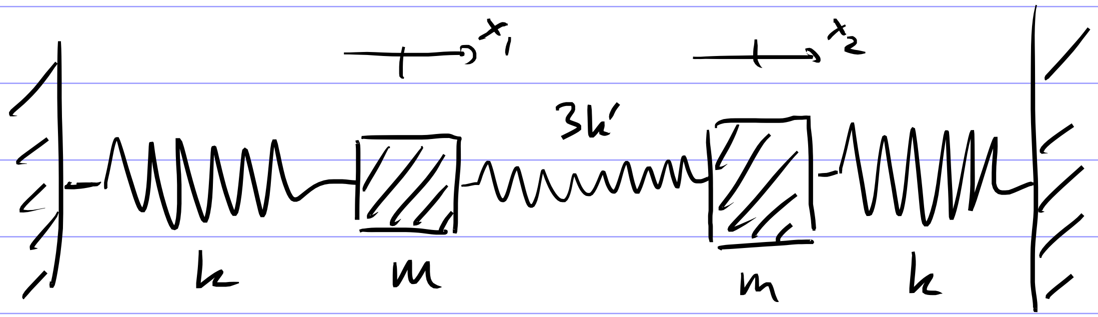
$$E_+ = \frac{p_+^2}{2m} + \frac{1}{2}k u_+^2 \quad ; \quad E_- = \frac{p_-^2}{2m} + \frac{1}{2}(k + 6k')u_-^2$$

where E_+ only depends on u_+, p_+ and E_- on p_-, u_-

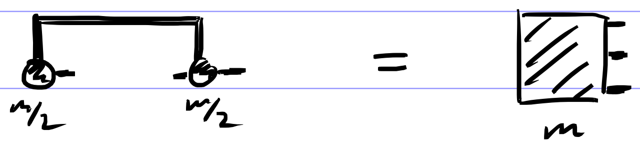
We have decoupled the system into two independent harmonic oscillators with Hamiltonians E_+ and E_- (<u>normal modes</u>). So $E_\pm$ are constants of motion.

<u>Method 4</u>: simplify setup & use Newton.

Our problem is equivalent to the setup:

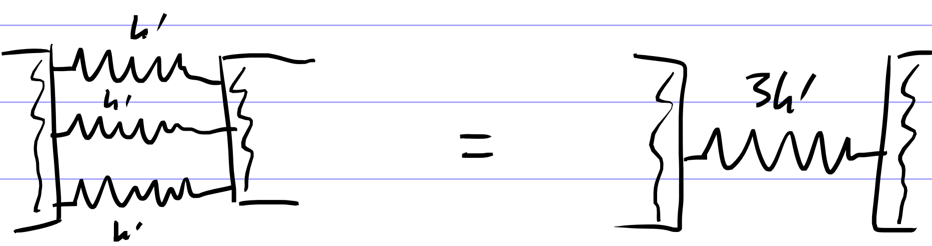


This is because both rigid object combinations can be replaced by a single mass



and it doesn't matter if we compress or dilate a spring in the opposite direction — it gives the same force.

Furthermore, we can replace the three springs in parallel by a single spring with constant $3k'$:



(Alternatively, the fact that this setup is equivalent to the original one follows directly from the fact that their Lagrangians are the same.)

Then from Newton's 2nd law, we have that

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + 3k'(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - 3k'(x_2 - x_1)$$

Then we can compute the total time derivative

$$\frac{dE_+}{dt} = \frac{1}{2m}(m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2)(m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2) + \frac{k}{2}(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\left[\underbrace{-kx_1 + 3k'(x_2 - x_1) - kx_2 - 3k'(x_2 - x_1) + k(x_1 + x_2)}_{=0}\right]$$

$$= 0$$

$\rightarrow$ E_+ is a constant of motion.